

# TEMA 1. Conceptos Fundamentales en Geodesia

## 1. Introducción.

En un curso en el que se desarrollan las principales características del GPS es necesario revisar y recordar los conceptos fundamentales de la Geodesia, sobre todo lo que se refiere a los Sistemas Geodésicos de Referencia y Sistemas de Coordenadas.

La geodesia es la ciencia que estudia la forma, dimensiones y campo gravitatorio de la Tierra. En esencia, la Geodesia es la base de la Topografía y la Cartografía, de tal forma que un estudio de estas dos siempre lleva implicado un conocimiento más o menos riguroso de la Geodesia.

El campo tan amplio abarcado por la Geodesia hace que se pueda dividir en:

- ✓ **Geodesia Física:** estudia el campo gravitatorio de la Tierra, partiendo de mediciones del mismo y el modelado del mismo.
- ✓ **Geodesia Geométrica:** estudia la figura de la Tierra en su aspecto geométrico, dimensiones.
- ✓ **Astronomía Geodésica:** estudia los métodos astronómicos que permiten determinar las coordenadas geográficas sobre la superficie terrestre de una serie de puntos fundamentales sobre los que se basarán las redes geodésicas.
- ✓ **Geodesia Espacial:** utiliza las mediciones a cuerpos externos a la Tierra para el posicionamiento y las mediciones geodésicas.

F. R. Helmert (1880) define la Geodesia como “la ciencia de la medida y representación de la Tierra”. Esto implica en primer lugar, obtener un conocimiento de la forma y dimensiones de la Tierra, pero por otra parte, también se podría decir que es la ciencia que proporciona o determina coordenadas para cada punto de la superficie terrestre.

## 2. La figura de la Tierra.

Clairaut, 1743, dice: "*Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique*". Desde esos días, la base del conocimiento de la figura de la Tierra no ha variado, ya que sigue siendo un término moderno aplicado a la definición del geoide, el cual es definido como la superficie (de nivel) equipotencial del campo gravitatorio de la Tierra. Esta superficie, como media, coincide con el nivel medio del mar (MSL) en un océano abierto sin perturbaciones o su extensión hipotética por debajo de las masas continentales (Bomford, 1977; Clarke, 1880; Fischer, 1845; Listing, 1873; Torge, 1991).

Un punto de la superficie terrestre está sometido casi exclusivamente a la atracción de la Tierra y a la fuerza centrífuga derivada de su rotación, de tal manera que siendo  $V$  el potencial gravitatorio y  $\phi$  el potencial centrífugo, el potencial de la gravedad será:

$$W = V + \phi$$

y por tanto será función de las coordenadas de cada punto. Los puntos para los cuales  $W = \text{cte}$  definen una superficie equipotencial cuyo gradiente determina en cada punto el vector de gravedad  $g$ , siendo la dirección la que define la vertical del lugar:

$$g = \nabla W$$

La superficie equipotencial o de nivel materializado por los océanos cuando se prescinde del efecto perturbador de las mareas (casi la superficie del nivel medio de los mares) se denomina geoide y es, como todos sabemos, la superficie de referencia para la altitud.

Veremos más adelante que la introducción del geoide como superficie de nivel cuyo campo de gravedad verifica  $W = W_0 = \text{cte}$ , tiene sentido físico, pero en Geodesia Geométrica, y más en GPS, hemos de idealizar esta superficie en la práctica con medidas, ya que su determinación física es uno de los problemas más intrincados de la Geodesia.

Por todo ello, para la materialización de coordenadas planas, hemos de considerar la Tierra como un elipsoide de revolución achatado por los polos que gira con movimiento uniforme alrededor de uno de sus ejes principales de inercia (eje polar o menor).

Los sistemas tradicionales en los que se utiliza como Sistema de Referencia uno bidimensional sobre un elipsoide de referencia pasan a ser en la actualidad, con las

nuevas técnicas de satélite a ser más complejos y sobre un sistema de coordenadas cartesianas geocéntricas.

### 3. Sistemas elipsoidales de referencia.

Como ya se ha dicho, la superficie de la Tierra puede representarse con mucha aproximación mediante un elipsoide de revolución, definiéndose este sistema con:

- Superficie de referencia: dimensiones (semiejes  $a$ ,  $b$ ), excentricidad ( $e$ ).
- Ejes o líneas de referencia en la superficie.
- Sentidos de medida.

A partir de las dimensiones de los semiejes del elipsoide  $a$  (semieje mayor) y  $b$  (semieje menor) se definen los parámetros geométricos:

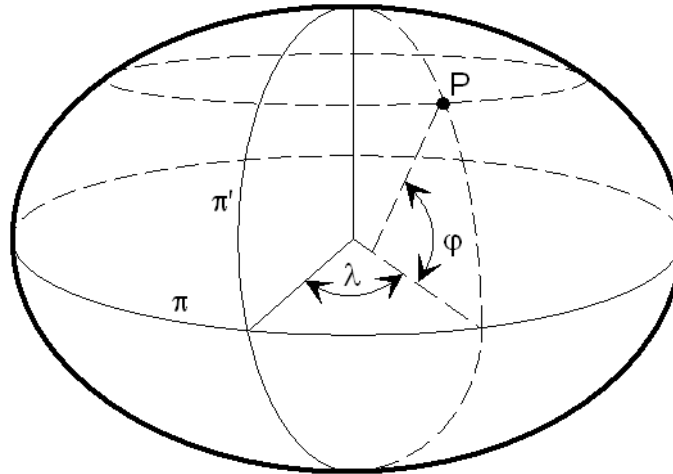
Achatamiento: 
$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

Primera excentricidad: 
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$
 o como se suele expresar:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Segunda excentricidad: 
$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

Las líneas de referencia elegidas de la superficie elipsoidal son los meridianos y los paralelos, con plano fundamental el del Ecuador ( $\pi$ ) y como plano secundario, el plano meridiano que contiene al meridiano origen ( $\pi'$ ).



**Fig. 1. Coordenadas geodésicas en el elipsoide**

Sobre esta superficie se definen las **coordenadas geodésicas**:

- ✓ Latitud geográfica ( $\varphi$ ): ángulo medido sobre el plano meridiano que contiene al punto entre el plano ecuatorial y la normal al elipsoide en P.
- ✓ Longitud geográfica ( $\lambda$ ): ángulo medido sobre el plano ecuatorial entre el meridiano origen y el plano meridiano que pasa por P.

La relación entre latitud geocéntrica ( $\Phi$ ), considerando el vector O (geocentro) al punto P, y geodésica queda definida por:

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \tan \phi$$

Si en lugar de considerar la normal al elipsoide en P consideramos la normal al geoide (línea de la plomada), obtenemos las **coordenadas astronómicas**.

Las coordenadas astronómicas de un punto definen la dirección de la vertical de este lugar con respecto al eje de rotación de la Tierra. Se obtienen por observación astronómica y son independientes de cualquier hipótesis realizada sobre la forma de la Tierra, ya que se refieren a un dato físico como es la vertical del lugar.

Sin embargo, las coordenadas geodésicas se obtienen mediante cálculos y observaciones hechas sobre una superficie convencional (elipsoide de referencia), referidos a la normal al elipsoide trazada por dicho lugar.

Una relación muy conocida que se aplicaba en las antiguas redes geodésicas para efectuar la corrección geodésico-astronómico en los acimutes (puntos Laplace) era la ecuación de Laplace:

$$A_a - A_g = (\Lambda - \lambda) \operatorname{sen} \Phi$$

Otra opción es conocer las componentes de la desviación de la vertical en el punto:

$$\xi = \Phi - \varphi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi$$

### 3.1. Radios de curvatura del elipsoide de revolución.

El radio de curvatura de una curva plana  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  se define como:

$$\rho = - \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d^2 x}}$$

Operando sobre la ecuación del elipsoide y sustituyendo x e y por las coordenadas cartesianas, obtenemos el radio de curvatura del meridano que pasa por el punto,  $\rho$ :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

El radio del paralelo p es:

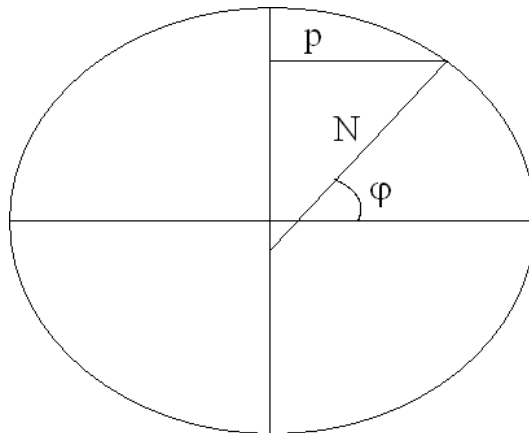
$$p = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Y la gran normal (N) es el radio de curvatura del primer vertical que pasa por el punto (**Tª Meusnier**):

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

ya que  $N = p / \cos \varphi$ .

Cualquier sección del elipsoide tendrá un radio de curvatura comprendido entre N (máximo) y  $\rho$  (mínimo).



**Fig. 2. Radio principal de curvatura de la elipse meridiana**

La curvatura de una sección normal arbitraria de acimut  $\alpha$  se puede calcular según la **fórmula de Euler**:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

A partir de estas definiciones, las longitudes de arco de meridiano y paralelo se definen:

$$ds_m = \rho \delta\varphi$$

$$ds_p = N \cos \varphi \delta\lambda$$

La longitud de arco de meridiano:

$$s_m = \int_0^\varphi \rho \cdot \delta\varphi = a(1 - e^2) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

No existe una expresión cerrada para el cálculo de esta integral, utilizando diferentes expresiones con desarrollos en serie para calcular la longitud de arco de meridiano. Una de las más usadas puede ser (Snyder, 1979):

$$s = a \left[ \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} \right) \varphi - \left( \frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin 4\varphi \right]$$

La longitud de arco de paralelo entre dos longitudes geográficas dadas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ :

$$s_p = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} N \cos \varphi \delta\lambda = N \cos \varphi \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$$

### 3.2. Reducción de medidas al elipsoide.

Al ser el elipsoide la superficie de referencia sobre la que se realizan los cálculos de coordenadas geodésicas, es necesario reducir al mismo las mediciones realizadas sobre el terreno.

En el caso de las medidas angulares, la reducción, aunque rigurosamente existe, es prácticamente insignificante incluso para lados de primer orden (30 km).

La reducción clásica que se hace es en medidas de distancia:

#### 1. Reducción al horizonte medio.

Suponiendo la distancia que une dos puntos de diferente altitud, la corrección a realizar para obtener una distancia horizontal sobre el horizonte medio de ambos puntos es:

$$c = -\frac{\Delta h^2}{2D} - \frac{\Delta h^4}{8D^3}$$

siendo  $\Delta h$  el incremento de altitud entre ambos puntos y  $D$ , la distancia medida. Por supuesto, la corrección es negativa (la distancia reducida es siempre inferior a la medida):

$$D_1 = D + c$$

siendo  $D_1$  la distancia reducida y  $D$  la distancia medida.

## 2. Reducción al nivel del mar.

El segundo paso sería la reducción de la distancia del horizonte medio al nivel del mar. Estrictamente, tendría que hacerse al elipsoide, pero las altitudes estarán referidas normalmente al nivel medio del mar y no al elipsoide (la diferencia es la ondulación del geode). Sin embargo, la ondulación del geode en España con respecto al elipsoide de Hayford es de unos 40 metros, lo cual no introduce variación sustancial en la reducción. La distancia reducida al nivel del mar viene dada por:

$$D_2 = \frac{D_1 \cdot R}{R + h_m}$$

siendo  $h_m$  la altitud media de los dos extremos de la base y  $R$  puede ser el radio de la esfera media, aunque estrictamente es el radio de la sección normal entre los dos puntos, que viene dado por la fórmula de Euler:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \Rightarrow R_\alpha = \frac{N \cdot \rho}{\rho \cdot \sin^2 z + N \cdot \cos^2 z}$$

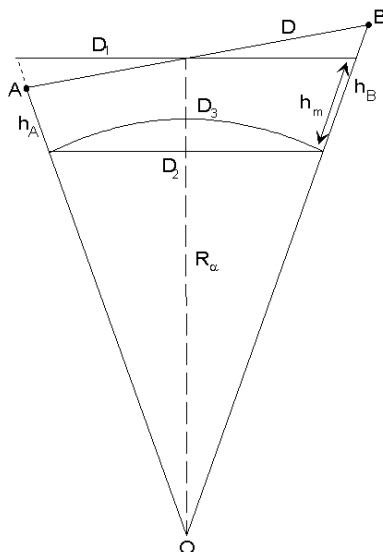
## 3. Paso de la cuerda al arco.

La última corrección a hacer es el paso de la cuerda al arco, ya que la distancia para el cálculo de coordenadas tiene que estar sobre el arco (del elipsoide). En este caso,

como se puede intuir, la corrección es positiva (la distancia sobre el arco es mayor que la distancia sobre la cuerda):

$$D_3 = D_2 + \frac{D_2^3}{24R^2}$$

En este caso, cabe hacer la misma consideración respecto a R.



Las correcciones sobre el horizonte medio y paso al nivel del mar se pueden hacer también en un solo paso a partir de la fórmula:

$$D_2 = \left[ \frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)} \right]^{1/2}$$

### 3.3. Problemas directo e inverso sobre el elipsoide.

El cálculo de coordenadas a partir de una distancia y un acimut desde un punto a otro, conocidas las coordenadas de uno de los puntos se denomina como problema directo



de la geodesia. El problema inverso sería la determinación del acimut y la distancia a partir de las coordenadas de un par de puntos.

La resolución de estos problemas ha dado lugar a numerosos algoritmos propuestos por diferentes autores (Levallois, Helmert, Cotichia, Rudoe, etc), cada uno con un cierto grado de aproximación según los términos utilizados en cada fórmula.

Unas fórmulas bastante simples con buenos resultados hasta 30 km son las aproximadas de Clarke:

$$p = \frac{D^2 \cdot \text{sen } A \cdot \cos A}{2 \cdot N_x \cdot \rho_x} \quad q = p \cdot \tan A \cdot \tan \varphi_x$$

$$\Delta\varphi = \frac{D \cdot \cos\left(A - \frac{2}{3}p\right)}{\rho_y} - q$$

$$\Delta\lambda = \frac{D \cdot \text{sen}\left(A - \frac{1}{3}p\right)}{N_x \cdot \cos\left(\varphi_2 + \frac{1}{3}q\right)}$$

donde  $x$  se refiere a  $\varphi_x = \varphi_1 + \frac{D \cdot \cos A}{\rho}$

$y$  se refiere a  $\varphi_y = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_x)$

Para lados superiores a 30 km habría que utilizar otros desarrollos con más términos.

Por otra parte, el acimut recíproco del directo (la diferencia es la convergencia de meridianos) se puede calcular a partir de la expresión:

$$\theta_2^1 = \theta_1^2 \pm 180^\circ + (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \text{sen}\left(\varphi_2 - \frac{2}{3}q\right) - p$$

Como se ha dicho, estas fórmulas no dejan de ser aproximadas. Para un cálculo riguroso a grandes distancias, es necesario aplicar más términos o resolver el problema por otros métodos (punto auxiliar, método de Krasovsky, argumentos medios con desarrollos en serie...) que en este resumen no tienen cabida.

El problema geodésico inverso (determinación de distancia y acimut a partir de las coordenadas de dos puntos) es algo más complicado. Sin embargo, se pueden utilizar también procedimientos aproximados más simples (cálculo de los arcos de meridiano y paralelo o reducción a coordenadas UTM). Una aproximación bastante buena viene dada por la denominada "fórmula topográfica" (errores inferiores a 0,3 m a distancias hasta 40 km):

$$L = \frac{\rho_m \cdot \Delta\varphi}{\cos\left(A + \frac{1}{2}\Delta A\right)}$$

o también:

$$L = \frac{N_m \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi_m}{\operatorname{sen}\left(A + \frac{1}{2}\Delta A\right)}$$

con  $\Delta A = \Delta\lambda \operatorname{sen}\varphi_m$

### 3.4. Elipsoides de referencia.

La obtención de una superficie de referencia con un desarrollo matemático sencillo es imprescindible para poder realizar la proyección de los puntos sobre la misma, de tal forma que el geoide no puede ser esa superficie. El elipsoide de revolución que mejor se adapte al geoide en la zona con un punto donde ambos coinciden o bien la normal a ambos es la solución adoptada: elipsoide de referencia, constituyendo el concepto de Datum geodésico el conjunto de ambos:

- ✓ Una superficie de referencia (elipsoide de revolución).
- ✓ Un punto fundamental en el que coinciden normales al geoide y al elipsoide.

En geodesia tendremos dos Datum: horizontal, visto hasta ahora, donde coincidirán las coordenadas astronómicas y las geodésicas, y el vertical, que es la superficie de referencia respecto a la que se definen las altitudes. En este caso, lo más normal es que sea el geoide, con diferentes tipos de altitudes que veremos posteriormente.

A lo largo de la historia diversos elipsoides se han utilizado para definir el Sistema de Referencia de cada país, de tal forma que se define aquel que mejor se ajuste al geoide. Sucesivamente se han ido desarrollando esfuerzos encaminados a la adopción de un sistema único, lo cual ha sido posible gracias al desarrollo de las técnicas espaciales.

La elección del elipsoide se justifica en su sencillez matemática y el ajuste al geoide con aproximación de primer orden, teniendo en cuenta que:

- ✓ El centro gravitatorio terrestre debería coincidir con el centro del elipsoide.
- ✓ El plano definido por el Ecuador terrestre debe coincidir con el del elipsoide.
- ✓ La suma de los cuadrados de las ondulaciones del geoide debe ser mínima.

Bomford admite que aun adoptando valores arbitrarios para la latitud y longitud geodésicas en el Datum, es necesario mantener el paralelismo entre el eje menor del elipsoide y el de rotación de la Tierra.

Es evidente que la definición de numerosos elipsoides de referencia llevados a cabo en los países dificulta notablemente la conexión de trabajos internacionales y cartografía, de tal forma que desde principios del siglo XX se mantuvieron intenciones de establecer una cartografía uniforme, siendo Hayford en 1910 el que, estableciendo un elipsoide para la representación de EEUU, propuso en 1924 en la Asamblea Internacional de Geodesia y Geofísica (Madrid) un Elipsoide Internacional de Referencia, con  $a = 6378388$  y  $\alpha = 1/297$ .

La Asamblea General en Estocolmo adoptó para este elipsoide la fórmula de gravedad internacional establecida por G. Cassinis correspondiente a la fórmula de gravedad normal, esencial para la adopción de un elipsoide de nivel:

$$\gamma_0 = 9.78049(1 + 0.0052884 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi) m \cdot s^{-2}$$

Este elipsoide fue utilizado ampliamente por la mayoría de países, no siendo perfeccionado hasta 1964, donde la Unión Astronómica Internacional, en Hamburgo estableció unos nuevos valores de  $a = 6378160$  y  $\alpha = 1/298,25$ .

Posteriormente, en la Asamblea General de la U.G.G.I. en Lucerna (1967) el Sistema de Referencia 1924 fue sustituido por el Sistema Geodésico de Referencia 1967 con las constantes:

- ✓  $a = 6378160$  m
- ✓  $GM = 398603 \cdot 10^9$  m<sup>3</sup>s<sup>-2</sup>
- ✓  $J_2 = 1082.7 \cdot 10^{-6}$
- ✓  $w = 7.2921151467 \cdot 10^{-5}$  rad s<sup>-1</sup>

En la orientación de este sistema se estipula:

- a) El eje menor del elipsoide de referencia es paralelo a la dirección definida por el origen internacional convencional (O.I.C.) para el movimiento del polo.
- b) El meridiano de referencia es paralelo al meridiano cero adoptado por el BIH para las longitudes (Greenwich).

Nombre del elipsoide	a	b	$\alpha$	e
Airy 1830	6,377,563.396	6,356,256.909	299.32496	0.081673
Modified Airy	6,377,340.189	6,356,034.448	299.32496	0.081673
Australian National	6,378,160.000	6,356,774.719	298.25000	0.081820
Bessel 1841 (Namibia)	6,377,483.865	6,356,165.383	299.15281	0.081697
Bessel 1841	6,377,397.155	6,356,078.963	299.15281	0.081697
Clarke 1866	6,378,206.400	6,356,583.800	294.97869	0.082272
Clarke 1880	6,378,249.145	6,356,514.870	293.46500	0.082483
Delambre 1800	6,375,635.000	6,356,564.000	334.00000	0.077288
Everest (India 1830)	6,377,276.345	6,356,075.413	300.80170	0.081473
Everest (Sabah Sarawak)	6,377,298.556	6,356,097.550	300.80170	0.081473
Everest (India 1956)	6,377,301.243	6,356,100.228	300.80170	0.081473
Everest (Malaysia 1969)	6,377,295.664	6,356,094.668	300.80170	0.081473
Everest (Malay&Sing 1948)	6,377,304.063	6,356,103.039	300.80170	0.081473
Everest (Pakistan)	6,377,309.613	6,356,108.571	300.80170	0.081473
Modified Fischer 1960	6,378,155.000	6,356,773.320	298.30000	0.081813
Helmert 1906	6,378,200.000	6,356,818.170	298.30000	0.081813
Hough 1960	6,378,270.000	6,356,794.343	297.00000	0.081992
Indonesian 1974	6,378,160.000	6,356,774.504	298.24700	0.081821
<b>Hayford 1910 (Internacional)</b>	<b>6,378,388.000</b>	<b>6,356,911.946</b>	<b>297.00000</b>	<b>0.081992</b>
Krassovsky 1940	6,378,245.000	6,356,863.019	298.30000	0.081813
GRS 80	6,378,137.000	6,356,752.314	298.25722	0.081819
South American 1969	6,378,160.000	6,356,774.719	298.25000	0.081820
Struve 1924	6,378,298.300	6,356,657.100	294.73000	0.082306

*Fig. 3. Principales elipsoides utilizados en cartografía*

### 3.5. World Geodetic System 1984 (WGS84).

Desde 1987, el GPS utiliza el World Geodetic System WGS-84, que es un sistema de referencia terrestre único para referenciar las posiciones y vectores. Se estableció este sistema utilizando observaciones Doppler al sistema de satélites de navegación NNSS o Transit, de tal forma que se adaptara lo mejor posible a toda la Tierra.

Se define del siguiente modo:

- Origen, centro de masas de la Tierra, incluyendo océanos y atmósfera.

- Eje Z paralelo a la dirección del polo CIO o polo medio definido por el BIH, época 1984.0 con una precisión de 0,005"
- El eje X la intersección del meridiano origen, Greenwich, y el plano que pasa por el origen y es perpendicular al eje Z, el meridiano de referencia coincide con el meridiano cero del BIH en la época 1984.0 con una precisión de 0,005". Realmente el meridiano origen se define como el IERS Reference Meridian (IRM).
- El eje Y ortogonal a los anteriores, pasando por el origen.
- Terna rectangular dextrorum

Este sistema de referencia tiene asociado el elipsoide de referencia definido por los siguientes parámetros:

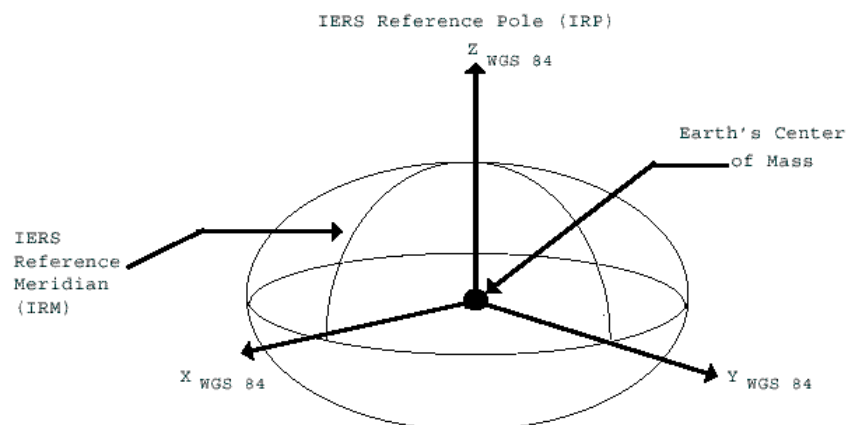
Semieje mayor de la elipse  $a = 6.378,137 \text{ km}$

Semieje menor de la elipse  $b = 6.356,752 \text{ km}$  (parámetro derivado)

Factor de achatamiento  $f = 1/298,257223563$

Velocidad angular de la tierra  $\omega_E = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$

Constante de gravitación  $GM = (3986004,418 \pm 0.008) \cdot 10^8 \text{ m}^3 / \text{s}^2$



**Fig. 4. Sistema de referencia WGS84**

Es necesario hacer una distinción entre la definición de un sistema de coordenadas y la realización práctica de un marco de referencia. Para conseguir una realización práctica de un marco geodésico global de referencia se tienen que establecer una serie de puntos con un conjunto de coordenadas. Un conjunto de puntos consistentes infieren:

- la localización de un origen
- la orientación del sistema de ejes cartesianos ortogonales
- una escala

En términos modernos, un conjunto de estaciones con coordenadas bien determinadas constituyen o representan una realización de un Marco de Referencia Terrestre (TRF, Terrestrial Reference Frame). El marco de referencia original de WGS84 fue establecido en 1987 a través de un conjunto de estaciones NNSS (Navy Navigation Satellite System) o TRANSIT (Doppler).

El principal objetivo a la hora de la realización del marco se centró en alinear lo más preciso posible, el origen, la escala y la orientación del marco WGS84 con respecto al Sistema Terrestre definido por el BIH (BTS, BIH Terrestrial System) en la época 1984.0.

Como se ha dicho, el marco inicial de WGS84 fue definido en enero de 1987 por la Defense Mapping Agency (DMA) usando efemérides precisas de satélites TRANSIT con estaciones de seguimiento Doppler. Esta realización estuvo vigente hasta 1994, ya que varios estudios demostraron que existía un error sistemático entre las altitudes elipsoidales derivadas de GPS y las de Doppler para un mismo punto (error en la escala).

Se han realizado dos actualizaciones del WGS84, una de ellas denominada WGS84 (G730), en la época 1994, donde la G significa que se ha realizado por técnicas GPS y 730 es la semana GPS en la que se realizó la actualización, y otra denominada WGS84 (G873), en la época 1997.0.

Las nuevas exigencias de precisión hacen que este Sistema de Referencia, geocéntrico, con una indeterminación en el geocentro de 1 m, con un eje Z variable, etc, hacen que para la definición de Sistemas de Referencia más precisos sea necesario el uso de Marcos de Referencia, los denominados ITRF, concepto que veremos posteriormente con más detalle.

La razón proviene de cambios temporales de la corteza de la Tierra que deben ser estimados o modelados. Los más importantes son el movimiento de las placas

tectónicas y los efectos de marea de la corteza de la Tierra. Como consecuencia de estos efectos temporales, cualquier juego de coordenadas ha de referirse en el marco ITRF vigente correspondiente a una determinada época.

Los parámetros geométricos y físicos que se derivan de los principales en WGS84 son:

WGS 84 Ellipsoid Derived Geometric Constants

Constant	Notation	Value
Second Degree Zonal Harmonic	$\bar{C}_{2,0}$	$-0.484166774985 \times 10^{-3}$
Semi-minor Axis	b	6356752.3142 m
First Eccentricity	e	$8.1819190842622 \times 10^{-2}$
First Eccentricity Squared	$e^2$	$6.69437999014 \times 10^{-3}$
Second Eccentricity	$e'$	$8.2094437949696 \times 10^{-2}$
Second Eccentricity Squared	$e'^2$	$6.73949674228 \times 10^{-3}$
Linear Eccentricity	E	$5.2185400842339 \times 10^3$
Polar Radius of Curvature	c	6399593.6258 m
Axis Ratio	b/a	0.996647189335
Mean Radius of Semi-axes	$R_1$	6371008.7714 m
Radius of Sphere of Equal Area	$R_2$	6371007.1809 m
Radius of Sphere of Equal Volume	$R_3$	6371000.7900 m

Table 3.4  
Derived Physical Constants

Constant	Notation	Value
Theoretical (Normal) Gravity Potential of the Ellipsoid	$U_0$	$62636860.8497 \text{ m}^2/\text{s}^2$
Theoretical (Normal) Gravity at the Equator (on the Ellipsoid)	$\gamma_e$	$9.7803253359 \text{ m/s}^2$
Theoretical (Normal) Gravity at the pole (on the Ellipsoid)	$\gamma_p$	$9.8321849378 \text{ m/s}^2$
Mean Value of Theoretical (Normal) Gravity	$\bar{\gamma}$	$9.7976432222 \text{ m/s}^2$
Theoretical (Normal) Gravity Formula Constant	k	0.00193185265241
Mass of the Earth (Includes Atmosphere)	M	$5.9733328 \times 10^{24} \text{ kg}$
$m = \omega^2 a^2 b / GM$	m	0.00344978650684

Tabla 1. Parámetros de WGS84.

El elipsoide WGS84 definido como una superficie equipotencial tiene un potencial gravitacional teórico (U). Este potencial puede ser calculado independientemente de la distribución de masas en el interior, ya que es teórico, usando los parámetros y constantes definidas para el elipsoide: semieje mayor (a), inversa del achatamiento (1/f), velocidad angular de la Tierra ( $\omega$ ) y la constante gravitacional egocéntrica (GM):

**- Gravedad normal en la superficie del elipsoide.**

La gravedad normal teórica ( $\gamma$ ) es el gradiente del potencial normal  $U$  y es dado en la superficie del elipsoide por la fórmula cerrada de Somigliana:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

donde  $k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1$ , siendo  $\gamma_e$  y  $\gamma_p$  la gravedad normal en el ecuador y en los polos respectivamente.

Esta es la denominada Fórmula de la Gravedad del elipsoide WGS84, cuya superficie equipotencial sirve como referencia horizontal y vertical, como figura geométrica de la Tierra y como superficie de referencia para la gravedad normal de la Tierra.

**- Gravedad normal en un punto por encima del elipsoide.**

Se suele usar la forma de  $\gamma$  desarrollada en serie de Taylor con la derivada respecto a la altura  $h$ :

$$\gamma_h = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} h^2$$

Desarrollando la expresión se llega a:

$$\gamma_h = \gamma \left[ 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right]$$

donde  $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$  y  $\gamma$  es la gravedad normal en el elipsoide a latitud  $\varphi$ .

Esta fórmula sería válida siempre que  $h$  sea relativamente pequeño. Para altitudes muy grandes o mayores exigencias de precisión se utilizan otros desarrollos.

**- Transformaciones de Datum locales a WGS84.**

Para aplicaciones poco precisas (cartografía de escalas pequeñas), la transformación puede realizarse mediante las fórmulas de transformación estándar de Molodensky:

$$\varphi_{\text{WGS84}} = \varphi_{\text{LOCAL}} + \Delta\varphi$$

$$\lambda_{\text{WGS84}} = \lambda_{\text{LOCAL}} + \Delta\lambda$$



$$h_{\text{WGS84}} = h_{\text{LOCAL}} + \Delta h$$

con:

$$\Delta\varphi = \frac{-\Delta X \sin \varphi \cos \lambda - \Delta Y \sin \varphi \sin \lambda + \Delta Z \cos \varphi + \Delta a (N e^2 \sin \varphi \cos \varphi) / a + \Delta f \left[ \rho \left( \frac{b}{a} \right) + \rho \left( \frac{b}{a} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right]}{N + h}$$

$$\Delta\lambda = \frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{(N + h) \cos \varphi}$$

$$\Delta h = \Delta X \cos \varphi \cos \lambda + \Delta Y \cos \varphi \sin \lambda + \Delta Z \sin \varphi - \Delta a \left( \frac{a}{N} \right) + \Delta f \left( \frac{b}{a} \right) N \sin^2 \varphi$$

donde  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  son las diferencias en coordenadas geocéntricas entre los centros del datum local y el WGS84 y  $N$  y  $\rho$  los radios principales de curvatura.

#### 4. Sistema de coordenadas cartesianas geocéntricas.

Para situar un punto en el espacio, se nos ocurre utilizar un sistema de coordenadas basado en tres ejes perpendiculares entre sí. El punto  $O$ , donde se cruzan los tres ejes, lo colocaremos en el centro de la Tierra. Al eje  $Z$ , lo colocamos de manera que coincida con el eje de rotación del planeta. Para terminar, haremos coincidir el plano definido por  $OXZ$  con un meridiano origen (Greenwich).

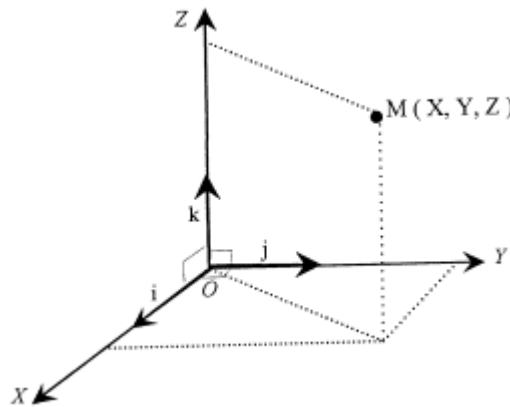


Fig. 5. Coordenadas cartesianas

Acabamos de definir un sistema geodésico de referencia. Con este sistema de coordenadas, cualquier punto  $M$  puede ser situado con los valores de las componentes  $X, Y, Z$ . A este tipo de coordenadas se les llama **coordenadas tridimensionales cartesianas**.

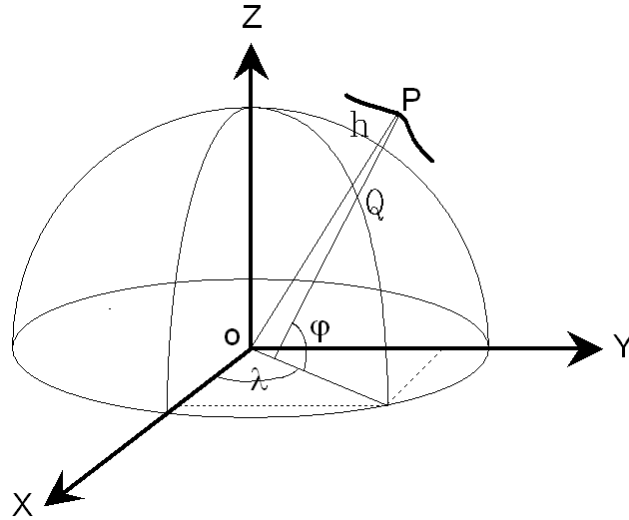


Fig 6. Coordenadas cartesianas geocéntricas.

#### 4.1. Paso coord. geográficas → Coord. Cartesianas

El problema planteado es pasar de coordenadas geodésica ( $\varphi, \lambda, h$ ) al sistema cartesiano elipsoidal, donde  $h$  es la altura del punto, pero medida sobre la normal al elipsoide (proyección Helmert).

El radio vector  $OQ$  es:

$$\overline{OQ} = \begin{pmatrix} XQ \\ YQ \\ ZQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cos \varphi \cos \lambda \\ N \cos \varphi \sin \lambda \\ N(1 - e^2) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

De la misma forma,  $h$  tiene la misma dirección que el vector  $OQ$ , por lo que:

$$\overline{h} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} h \cos \varphi \cos \lambda \\ h \cos \varphi \sin \lambda \\ h \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Tenemos que  $OP = OQ + QP$ , con lo cual tenemos finalmente:

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

## 4.2. Paso Coordenadas cartesianas → Coord. Geográficas

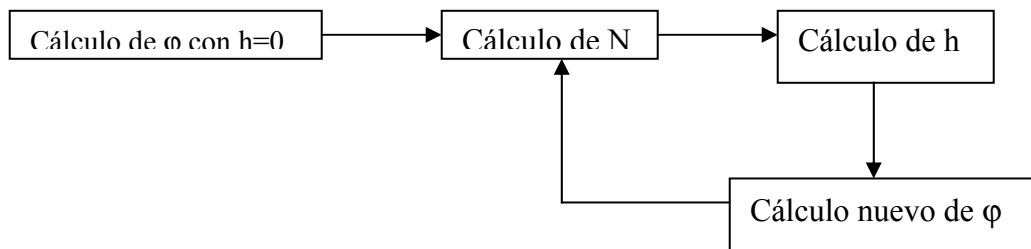
En el problema inverso, a partir de coordenadas geocéntricas (X, Y, Z), obtener coordenadas geográficas, hay que operar iterativamente, de tal forma que:

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$$

$$\varphi = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left( 1 - e^2 \frac{N}{N+h} \right)^{-1}$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

El proceso iterativo empezaría entrando en la fórmula primera con h=0, deduciendo N.



La convergencia del sistema de ecuaciones es muy rápida, puesto que  $N \gg h$ .

Existen también fórmulas aproximadas directas en las que no es necesaria la iteración:

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N$$

donde  $\theta$  es una cantidad auxiliar:  $\theta = \arctan \frac{Za}{pb}$

con  $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$

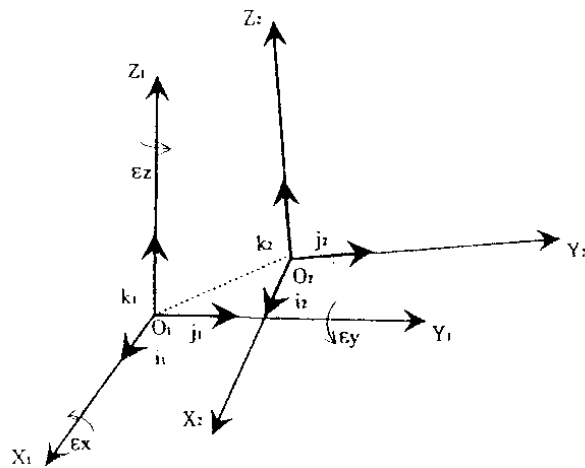
## 4.2. Transformación de Sistemas en coordenadas cartesianas.

Es evidente que este sistema de coordenadas cartesianas es más intuitivo y fácil de manejar que las coordenadas geodésicas, no teniendo que tener en cuenta ninguna superficie de referencia ni tampoco los parámetros de geometría del elipsoide. Precisamente éste es el "sistema básico" sobre el que el GPS trabaja en coordenadas (prescindiendo del sistema de coordenadas en el plano orbital).

También el paso de un Sistema Geodésico a otro es fácil de resolver haciendo el paso intermedio de transformar las coordenadas geodésicas a coordenadas cartesianas en cada sistema y hacer la transformación entre uno y otro sistema en cartesianas.

Para pasar de un sistema geodésico a otro, son necesarias tres operaciones :

- una traslación del centro de la Tierra O con un  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ .



**Fig. 7. Transformación entre sistemas cartesianos.**

- una rotación R (si los tres ejes no son paralelos entre sí)
- un factor de escala,  $\lambda$ .

Dado dos sistemas geodésicos (1) y (2), y admitiendo la posibilidad que los dos conjuntos de vectores de base no tengan la misma norma (problema de escala o de definición de las unidades de distancia), la transformación más corriente será una similitud (con 7 parámetros: 3 de traslación, 3 de rotación y 1 de factor de escala).

Si  $(X_i, Y_i, Z_i)$  son las coordenadas de un punto P en el sistema "i" (con  $i=1$  o  $2$ ), la transformación será, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1 + \lambda)R \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

Normalmente, los diferentes sistemas no son demasiado distantes, lo que

numéricamente, significa que:

- TX, TY, y TZ no exceden algunos centenares de metros.
- Que  $\lambda$  es de unas ppm ( $10^{-6}$ ).
- Que R es una rotación infinitesimal de la forma:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $R_x$ ,  $R_y$  y  $R_z$  son rotaciones sobre X, Y, Z que no exceden algunos segundos de arco.

La transformación puede ser remplazada por su modelo linealizado sin pérdida de precisión:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & Z_1 & -Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -Z_1 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & Y_1 & -X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ \lambda \\ R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} D_x &= X_2 - X_1 = T_x + \lambda X_1 + R_y Z_1 - R_z Y_1 \\ D_y &= Y_2 - Y_1 = T_y + \lambda Y_1 - R_x Z_1 + R_z X_1 \\ D_z &= Z_2 - Z_1 = T_z + \lambda Z_1 + R_x Y_1 - R_y X_1 \end{aligned}$$

Esta es la transformación básica general entre sistemas, si bien se estudiarán en posteriores capítulos otras transformaciones más perfeccionadas y/o complejas de forma más detallada (Badekas-Molodensky, DMA, NIMA, Bursa-Wolf, regresión múltiple...) y también otras fórmulas para la transformación directamente en coordenadas geodésicas. Se contemplarán asimismo los casos posibles que se pueden presentar.

#### - Transformación de semejanza bidimensional (Helmert).

Se trata de una transformación bidimensional (2D) simple en el que se determinan dos traslaciones, un giro y un factor de escala entre ambos sistemas.

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i$$

Si  $\alpha$  es muy pequeño, entonces el sistema puede quedar como:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} + (1 + \lambda) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \lambda & -\alpha \\ \alpha & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i$$

Con dos puntos con coordenadas en ambos sistemas, se resuelve. Normalmente, se suelen utilizar al menos cuatro puntos para resolver por mínimos cuadrados.

### - Transformaciones de semejanza tridimensionales.

La transformación de semejanza tridimensional presenta problemas y condicionantes ligeramente más complejos. La aplicación de las fórmulas en sistemas globales se hace con coordenadas cartesianas geocéntricas, para lo cual es necesario aplicar la expresión descrita anteriormente:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N+h) \sin \varphi - e^2 N \sin \varphi \end{bmatrix}$$

En donde h es realmente la altitud sobre el elipsoide y no sobre el geoide. El problema se plantea aquí porque normalmente en el sistema local no se va a poder conocer la altitud elipsoidal.

Los parámetros a determinar en este caso son 7: tres traslaciones, tres giros y un factor de escala.

Por otro lado, al tratarse de sistemas globales, se supone que los ejes son "casi" paralelos, en cuyo caso los cosenos del ángulo se igualan a 1 y los senos al ángulo.

El ámbito de aplicación de la transformación y su resolución da lugar a los dos modelos más conocidos para estos propósitos.

### - Transformación de Bursa-Wolf.

Este modelo es adecuado para transformación entre sistemas globales en un ámbito geográfico amplio.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{SR1} = \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix}_{SR2} + (1 + \lambda) \begin{bmatrix} 1 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 1 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{SR2}$$

Preparando el sistema para su resolución por mínimos cuadrados (3 o más puntos comunes en ambos sistemas de referencia) quedaría en la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \end{bmatrix}_{SR2} \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ \mu \\ \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \vdots \\ X_i \end{bmatrix}_{SR1} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \vdots \\ X_i \end{bmatrix}_{SR2}$$

Es decir, en la forma:

$$A \cdot X = L$$

Y resolviendo:

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot L$$

#### - Transformación de Badekas-Molodensky.

Esta transformación es idónea para la aplicación a una zona limitada, como un país o una región concreta. Para la resolución de este problema se divide en dos pasos, en los que en uno se resuelven los giros y el factor de escala y en el siguiente, las tres traslaciones. En ambos casos la solución se refiere al baricentro de los puntos, de tal forma que se calculan en primer lugar las coordenadas de los baricentros de ambos sistemas:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \quad \bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$$

Si se hace:

$$x_1 = X_1 - \bar{X} \quad y_1 = Y_1 - \bar{Y} \quad z_1 = Z_1 - \bar{Z}$$

Se plantean las ecuaciones para resolver los primeros cuatro parámetros:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \end{bmatrix}_{SR1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \end{bmatrix}_{SR2} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 & -z_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 & 0 & -x_1 \\ z_1 & -y_1 & x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{SR2} \begin{bmatrix} \lambda \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

Y finalmente se plantean las ecuaciones para resolver las tres traslaciones:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix}_{SR1} - \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix}_{SR2} - \begin{bmatrix} \bar{X} & 0 & -\bar{Z} & \bar{Y} \\ \bar{Y} & \bar{Z} & 0 & -\bar{X} \\ \bar{Z} & -\bar{Y} & \bar{X} & 0 \end{bmatrix}_{SR2} \begin{bmatrix} \mu \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

La aplicación práctica tanto en este caso como el anterior ha de hacerse con el conocimiento de altitudes elipsoidales, lo cual en WGS84 es lo común, pero no lo es en otros Datums locales, por lo que es necesario un proceso iterativo, en el cual en primer lugar se aplica la transformación a los puntos sobre el geoide (en ambos sistemas). Si se conoce la ondulación sobre WGS84, por ejemplo, se toma  $h=N$  para el conjunto de puntos en este sistema y  $h$  aproximada para el Datum local también sobre el geoide, resolviendo la transformación.

### 4.3. Sistema de coordenadas local y global.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas locales con origen en el punto  $P_i$  y las direcciones norte, este y arriba (ejes  $n$ ,  $e$ ,  $u$ ) del plano tangente al punto.

Las coordenadas globales son iguales que las geocéntricas definidas anteriormente, usando la notación vectorial  $\bar{X}$  en lugar de las componentes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . De la misma forma, los vectores  $\bar{X}_i$  y  $\bar{X}_j$  representan dos puntos de la superficie terrestre,  $P_i$  y  $P_j$ .

Definiendo el vector entre esos dos puntos en el sistema de coordenadas global como  $\bar{X}_{ij} = \bar{X}_j - \bar{X}_i$ , el vector en el sistema de coordenadas local referido al plano tangente en  $P$  es definido como  $\bar{x}_{ij}$ .



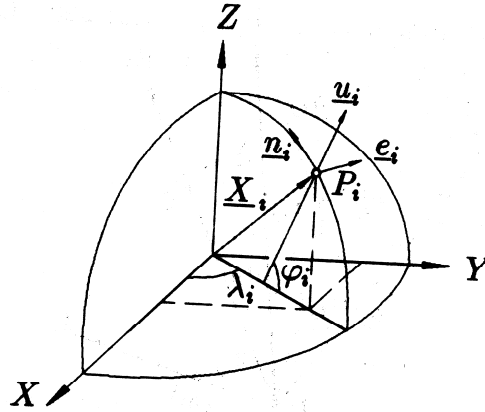


Fig. 8. Sistema de coordenadas local NEU.

En el sistema denominado NEU, los vectores  $n$  y  $e$  forman el plano tangente en  $P$  y la tercera coordenada  $u$  es ortogonal, coincidiendo con la normal al elipsoide:

$$\bar{n}_i = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i \cos \lambda_i \\ -\sin \varphi_i \sin \lambda_i \\ \cos \varphi_i \end{bmatrix} \quad \bar{e}_i = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_i \\ \cos \lambda_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{u}_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ \sin \varphi_i \end{bmatrix}$$

Realmente hay que tener en cuenta para ser más preciso, que el sistema local se refiere a coordenadas astronómicas y no geodésicas y la normal al plano tangente en  $P$  es normal al geoide, no al elipsoide, pero las diferencias para distancias pequeñas no son apreciables.

Por consiguiente, el vector  $\bar{x}_{ij}$  en el sistema NEU será:

$$\bar{x}_{ij} = \begin{bmatrix} n_{ij} \\ e_{ij} \\ u_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{n}_i \cdot \bar{X}_{ij} \\ \bar{e}_i \cdot \bar{X}_{ij} \\ \bar{u}_i \cdot \bar{X}_{ij} \end{bmatrix}$$

Uniendo los vectores  $\bar{n}_i, \bar{e}_i, \bar{u}_i$  del sistema local en la matriz  $\bar{D}_i$  tenemos:

$$\bar{D}_i = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i \cos \lambda_i & -\sin \lambda_i & \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ -\sin \varphi_i \sin \lambda_i & \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ \cos \varphi_i & 0 & \sin \varphi_i \end{bmatrix}$$

y por tanto la expresión anterior queda como:

$$\bar{x}_{ij} = \bar{D}_i^T \cdot \bar{X}_{ij}$$

Se pueden también expresar los componentes de  $\bar{x}_{ij}$  en función de la distancia espacial  $s_{ij}$ , el azimut  $\alpha_{ij}$  y el ángulo cenital  $z_{ij}$  mediante la relación:

$$\bar{x}_{ij} = \begin{bmatrix} n_{ij} \\ e_{ij} \\ u_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ij} \sin z_{ij} \cos \alpha_{ij} \\ s_{ij} \sin z_{ij} \sin \alpha_{ij} \\ s_{ij} \cos z_{ij} \end{bmatrix}$$

donde el azimut y el ángulo cenital se refieren a las medidas desde P.

Invirtiendo la expresión para obtener las medidas a partir de NEU:

$$s_{ij} = \sqrt{n_{ij}^2 + e_{ij}^2 + u_{ij}^2}$$

$$\tan \alpha_{ij} = \frac{e_{ij}}{n_{ij}}$$

$$\cos z_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{n_{ij}^2 + e_{ij}^2 + u_{ij}^2}}$$

## 5. Sistemas de altitudes.

### 5.1. El geoide como superficie de referencia.

La palabra geoide significa "forma de la Tierra" y fue introducida por Listing en 1873 como la superficie equipotencial que resulta de considerar una superficie equipotencial de los océanos en reposo y prolongados por debajo de los continentes. Sería la superficie de equilibrio de las masas oceánicas sometidas a la acción gravitatoria y a la fuerza centrífuga ocasionada por la rotación de la Tierra, de manera que en cualquier punto la dirección de la gravedad es perpendicular a esta superficie.

En este sentido, el geoide es una superficie definida por magnitudes físicas (el potencial terrestre), teniendo en cuenta las anomalías gravimétricas (debidas a la distribución de masas continentales y la diferente densidad de las cortezas) y el achatamiento de los polos.

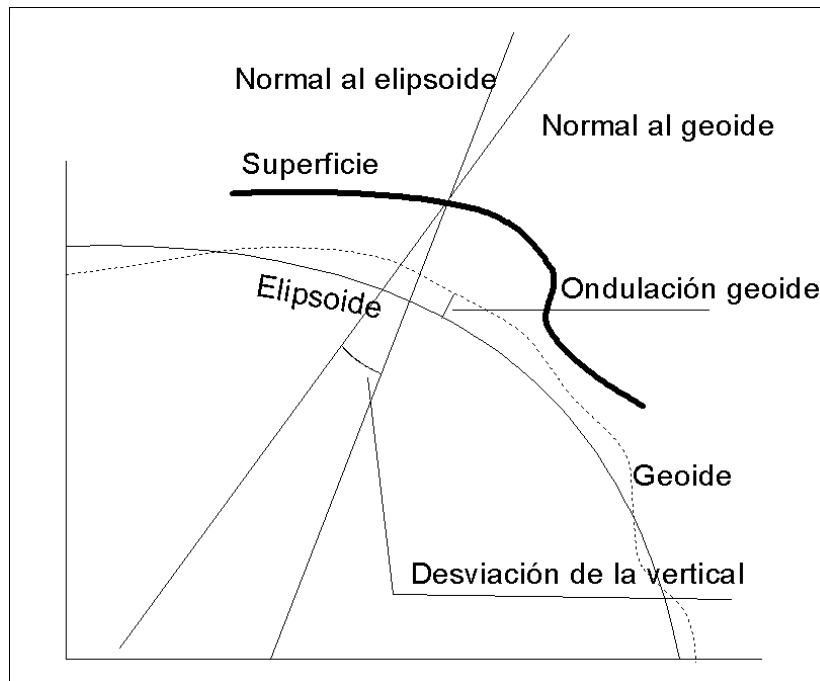
La diferencia en un punto determinado entre geode y elipsoide se denomina **ondulación del geode**, concepto fundamental en la evaluación de altitudes determinadas con GPS.

El ángulo existente en un punto determinado entre la normal al geode y la normal al elipsoide se denomina **desviación de la vertical**, siendo ésta nula en el Datum.

La desviación de la vertical se puede descomponer en dos componentes una en el sentido de la latitud ( $\xi$ ) y otra en el sentido de la longitud ( $\eta$ ), siendo sus expresiones en función de las coordenadas astronómicas y geodésicas:

$$\xi = \varphi - \phi$$

$$\eta = (\lambda - \Lambda) \cos \phi$$



**Fig. 9. Ondulación y desviación de la vertical**

Las fórmulas de Vening-Meinesz son muy útiles, puesto que proporcionan las componentes en función de la ondulación del geode en el sentido de la longitud o latitud:

$$\xi = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta N}{\delta \varphi}$$

$$\eta = -\frac{1}{N \cos \varphi} \cdot \frac{\delta N}{\delta \lambda}$$

Y la desviación de la vertical total  $\varepsilon$  en una dirección de acimut  $\alpha$  será:

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

Estas expresiones también resultan muy útiles cuando se quiere mezclar observaciones clásicas con GPS en una red para calcular, por ejemplo, altitudes elipsoidales, puesto que habría que corregir los ángulos cenitales de desviación de la vertical (normal geoide – normal elipsoide).

## 5.2. Determinación del geoide.

La determinación de la figura del geoide ha sido uno de los problemas fundamentales de la Geodesia Física desde el siglo pasado, estribando sus principales dificultades en la irregularidad del mismo sobre la superficie de la Tierra y la dificultad de obtener valores de gravedad en la superficie terrestre con precisión. A todo esto ha de añadirse la dificultad matemática y la complejidad del proceso.

Como se ha dicho anteriormente, el potencial total gravitatorio de la Tierra se define como:

$$W = V + \Phi$$

Siendo  $V$  el potencial gravitatorio y  $\Phi$  el potencial debido a la rotación de la Tierra. Si  $\omega$  es la velocidad angular de rotación, entonces:

$$\phi = \frac{1}{2} \omega(x^2 + y^2)$$

donde  $x$  e  $y$  son las coordenadas geocéntricas de un punto.

La función del potencial gravitacional se define como:

$$V = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \phi') (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

donde:

- $r$  = distancia desde el centro de masas de la Tierra.
- $a$  = semieje mayor elipsoide.
- $n, m$  = grado y orden, respectivamente de los coeficientes gravitacionales.
- $\phi'$  = latitud geocéntrica.

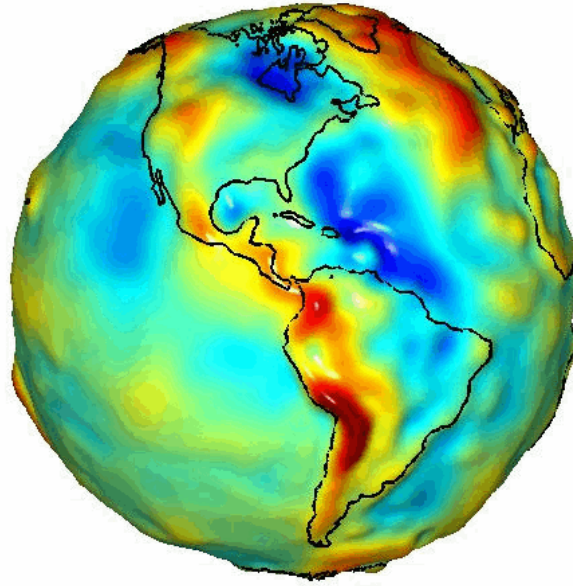
- $\lambda$  = longitud geocéntrica (o geodésica, da lo mismo).
- $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  = coeficientes gravitacionales normalizados =  $\left[ \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)k} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot C_{nm}$   
(lo mismo para  $S_{nm}$ ). Los coeficientes gravitacionales  $C_{nm}$  y  $S_{nm}$  son para  $m=0 \Rightarrow k=1$  y  $m>1 \Rightarrow k=2$ .
- $\bar{P}_{nm}(\sin \phi')$  = Función de Legendre normalizada =  $\left[ \frac{(n-m)!(2n+1)k}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{nm}(\sin \phi')$
- $P_{nm}(\sin \phi')$  = Función de Legendre =  $(\cos \phi')^m \frac{d^m}{d(\sin \phi')^m} [P_n(\sin \phi')]$
- $P_n(\sin \phi')$  = Polinomio de Legendre =  $\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\sin \phi')^n} (\sin^2 \phi' - 1)^n$

La determinación de los coeficientes de los armónicos esféricos del potencial gravitatorio se hace a partir del desarrollo de las anomalías de la gravedad  $\Delta g$ , las cuales son determinadas a nivel global en toda la Tierra a partir de observaciones gravimétricas o más concretamente, a partir de observaciones de satélites. Los modelos geopotenciales de la Tierra nos dan estos coeficientes (normalizados) hasta un determinado grado y orden (máximo, 360).

Es evidente que las series son válidas para  $r \geq a$ , es decir, para la superficie de la Tierra o para  $r$  mayor, no pueden usarse para masas en el interior de la Tierra.

Degree and Order		Normalized Gravitational Coefficients	
n	m	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
2	0	-.484165371736E-03	
2	1	-.186987635955E-09	.119528012031E-08
2	2	.243914352398E-05	-.140016683654E-05
3	0	.957254173792E-06	
3	1	.202998882184E-05	.248513158716E-06
3	2	.904627768605E-06	-.619025944205E-06
3	3	.721072657057E-06	.141435626958E-05
4	0	.539873863789E-06	
4	1	-.536321616971E-06	-.473440265853E-06
4	2	.350694105785E-06	.662671572540E-06
4	3	.990771803829E-06	-.200928369177E-06
4	4	-.188560802735E-06	.308853169333E-06
5	0	.685323475630E-07	
5	1	-.621012128528E-07	-.944226127525E-07
5	2	.652438297612E-06	-.323349612668E-06
5	3	-.451955406071E-06	-.214847190624E-06
5	4	-.295301647654E-06	.496658876769E-07
5	5	.174971983203E-06	-.669384278219E-06
6	0	-.149957994714E-06	
6	1	-.760879384947E-07	.262890545501E-07
6	2	.481732442832E-07	-.373728201347E-06
6	3	.571730990516E-07	.902694517163E-08
6	4	-.862142660109E-07	-.471408154267E-06
6	5	-.267133325490E-06	-.536488432483E-06
6	6	.967616121092E-08	-.237192006935E-06
7	0	.909789371450E-07	
7	1	.279872910488E-06	.954336911867E-07
7	2	.329743816488E-06	.930667596042E-07
7	3	.250398657706E-06	-.217198608738E-06
7	4	-.275114355257E-06	-.123800392323E-06
7	5	.193765507243E-08	.177377719872E-07
7	6	-.358856860645E-06	.151789817739E-06
7	7	.109185148045E-08	.244415707993E-07
8	0	.496711667324E-07	

Tabla 2. Coeficientes de EGM96.



**Fig. 10. GRACE gravity model.**

Diferentes métodos han sido empleados para la determinación del geoide, siendo el fundamental el método gravimétrico. Sin entrar en demasiados detalles sobre la descripción del método, ya que sería muy arduo su estudio en este curso, digamos que se basa en la evaluación en cada punto de gravedad observada de la evaluación de la famosa integral de Stokes:

$$N_{grav} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g(\varphi, \lambda) \cdot S(\Psi) d\sigma$$

donde R es el radio medio de la Tierra,  $\gamma$  es la gravedad normal del elipsoide,  $\sigma$  es la esfera de integración,  $\Delta g$  son las anomalías de la gravedad reducidas al geoide y  $S(\Psi)$  es la función de Stokes dada por:

$$S(\Psi) = \frac{1}{t} - 4 - 6t + 10t^2 - (3 - 6t^2) \ln(t + t^2) \quad \text{con} \quad t = \sin \frac{\Psi}{2}$$

siendo las anomalías de gravedad:

$$\Delta g_{red} = \Delta g_{obs} - \Delta g_{mod}$$

$\Delta g_{obs}$  son las anomalías gravimétricas observadas:

$$\Delta g_{obs} = g_{obs} + \delta_F - \delta_B + \delta_{top} - \gamma$$

donde  $g_{\text{obs}}$  es la gravedad observada en el terreno,  $\delta_F$  es la corrección aire libre o Faye,  $\delta_B$  es la corrección Bouguer simple,  $\delta_{\text{top}}$  es la corrección topográfica o Bouguer compuesta (normalmente, efectuar con modelo digital del terreno) y  $\gamma$  es la gravedad del elipsoide a esa latitud.

La anomalía del modelo  $\Delta g_{\text{mod}}$  puede representarse en forma de armónicos esféricos como el potencial perturbador  $T$  que resulta de restar el potencial gravitatorio terrestre  $W$  del potencial gravitatorio del elipsoide  $U$ :

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right\} + \Phi$$

donde  $r, \theta, \lambda$  son las coordenadas polares (radio geocéntrico, colatitud y latitud),  $GM$  es la constante gravitacional geocéntrica,  $a$  es el semieje mayor del elipsoide,  $P_{nm}(\cos \theta)$  es el polinomio de Legendre normalizado de primera clase,  $C_{nm}$  son los coeficientes armónicos esféricos normalizados del campo gravitacional terrestre y  $\Phi$  es el potencial centrífugo de la Tierra,  $\Phi = (1/2)\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$ .

$$U(r, \theta) = \frac{GM'}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right\} + \Phi$$

siendo  $M'$  en este caso la masa del elipsoide de referencia. El potencial perturbador viene dado por:

$$T(r, \theta, \lambda) = W - U = \frac{GM}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right\}$$

donde  $\Delta C_{nm}$  y  $\Delta S_{nm}$  son las diferencias entre los coeficientes del geopotencial y el potencial del elipsoide. La diferencia  $M - M'$  es muy pequeña y  $M'$  puede ser reemplazada por  $M$ .

Con esto llegamos a la expresión de la anomalía gravimétrica del modelo geopotencial:

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right\}$$

Se suele utilizar la ecuación de Bruns siguiente para el cálculo de ondulaciones del geoide:



$$N = \frac{T - \delta W}{U}$$

y por tanto:

$$N(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r\gamma} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right\}$$

Con  $n=m=360$  se llegan a obtener unos 10000 coeficientes. El más usado de todos ellos puede ser el OSU91A o el EGM96, este último más moderno.

En cualquier caso, se trata de modelos útiles para obtener anomalías aire libre y calcular anomalías modelo, pero para la obtención del modelo de geoides gravimétrico, en la práctica se divide la ondulación  $N$  en tres componentes:

$$N = N_{\text{mod}} + N_{\text{ind}} + N_{\text{gra}}$$

donde  $N_{\text{mod}}$  es la contribución del modelo de armónicos esféricos (EGM96, OSU91A, etc),  $N_{\text{ind}}$  es la contribución de la reducción al terreno (efecto indirecto o cogeoides) y  $N_{\text{gra}}$  es la contribución de las observaciones del campo gravitatorio terrestre: anomalías aire libre después de quitar el efecto del modelo geopotencial global y la topografía (corrección topográfica con modelo digital del terreno).

Como se ve, el tema es complejo y se han de tener en cuenta más variables no mencionadas aquí, la resolución de la integral de Stokes necesita técnicas avanzadas (transformada de Fourier ...). Veremos posteriormente cómo el geoides resultante ha de ser escalado, ya que se hacen una serie de suposiciones respecto a la masa del elipsoide, densidad media de la corteza, etc que originan unos valores que han de ser ajustados a partir de observaciones reales sobre el terreno. El GPS juega aquí un papel fundamental en este sentido, de tal forma que por un lado la definición de un geoides preciso necesita del GPS y por otro lado, el inverso, también se cumple: el GPS necesita de un modelo de geoides.

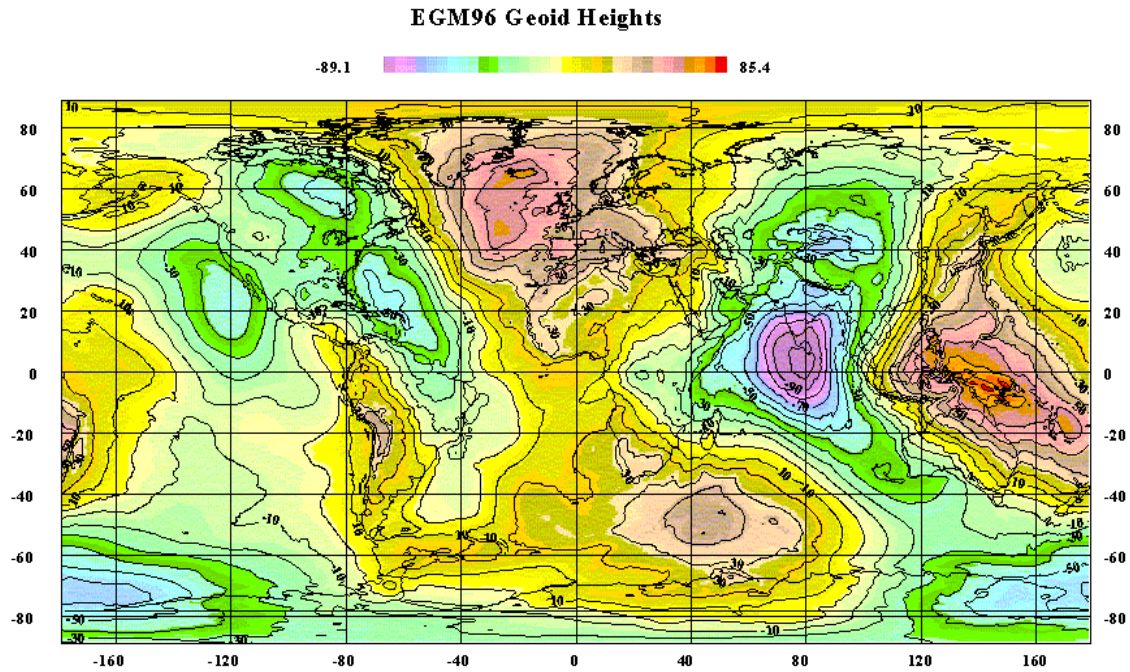


Fig. 11. Modelo EGM96

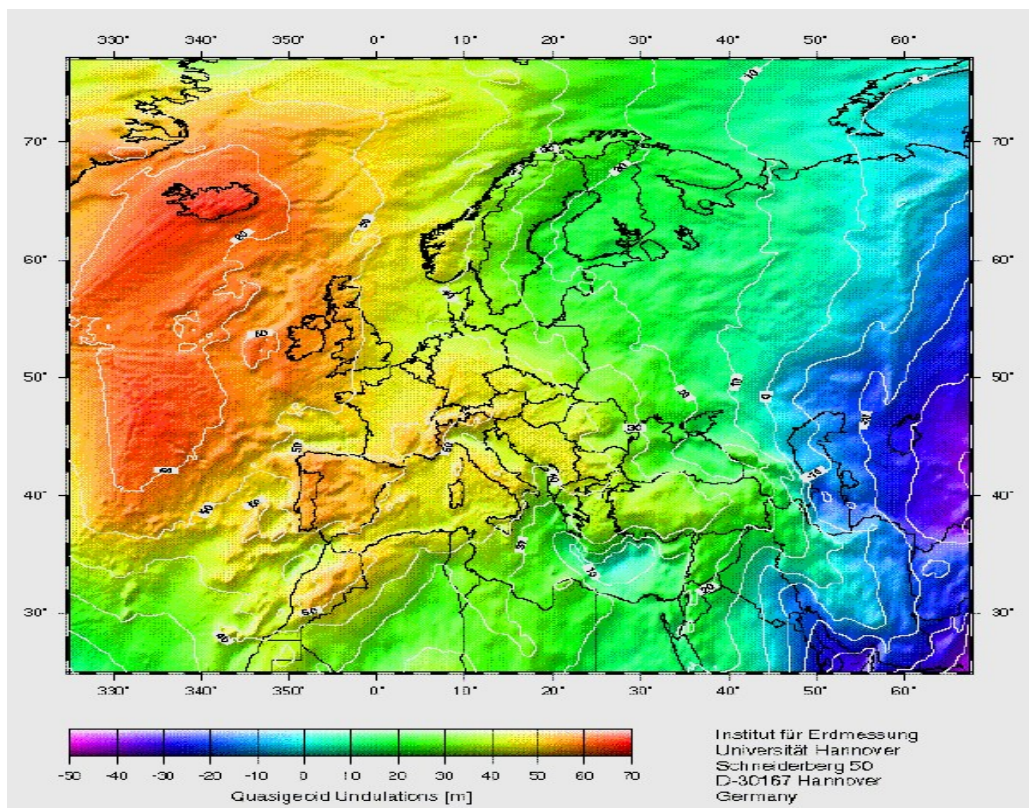


Fig. 12. Modelo EGG97 (Europa).

Actualmente, los satélites de observación terrestre han facilitado la labor en cuanto a la definición del geoide a través de sus observaciones (ver ejemplo de TOPEX/POSEIDON).

En el caso del modelo global EGM96, la ondulación viene dada por:

$$N(\varphi, \lambda) = N_0 + \xi(\varphi, \lambda, r) + \frac{\Delta g_B(\varphi, \lambda)}{\bar{\gamma}} H(\varphi, \lambda)$$

con:

- $N_0 = -0.53$  m (esta cantidad es la diferencia entre el semieje mayor de WGS84 y el elipsoide que mejor se ajusta a la Tierra).
- $\Delta g_{BA}(\varphi, \lambda) = \text{anomalía Bouguer} = \text{Anomalía aire libre} - 0.1119 H(\varphi, \lambda)$ .
- $\text{Anomalía aire libre} = g + 0.3086 H(\varphi, \lambda) - \gamma$ .
- $\bar{\gamma}$  = valor medio de gravedad normal.
- $H(\varphi, \lambda)$  = definido a partir del MDT JGP95E (Joint Gravity Project 95).

EGM96 está públicamente disponible, con valores de ondulación del geoide con un rango de error de entre 0,5 y 1,0 metros (1 sigma) a nivel mundial. Los productos de EGM96 como modelo geoidal para WGS84 incluyen:

- Un fichero de ondulaciones del geoide sobre WGS84 de 15' x 15'.
- Los valores de los coeficientes armónicos esféricos completos hasta grado y orden 360.

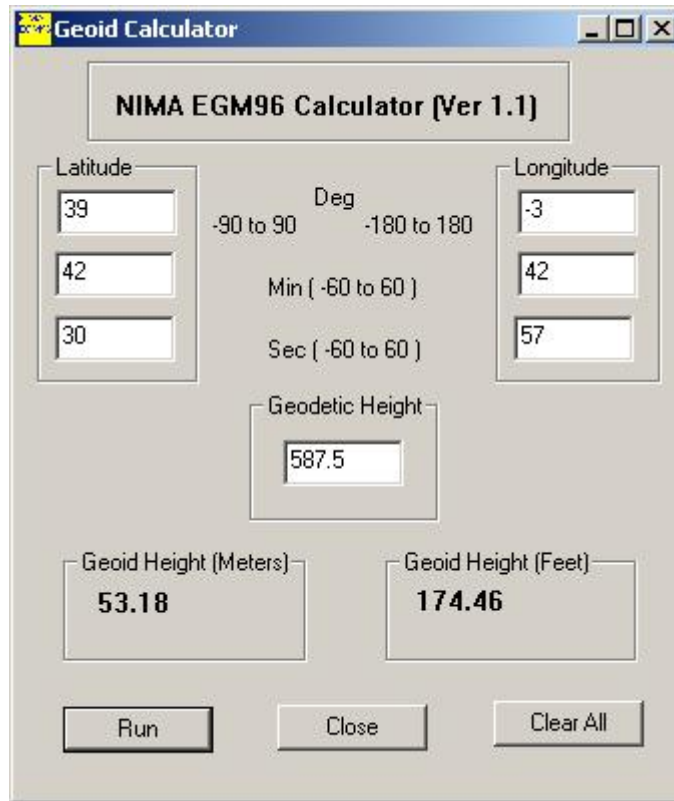


Fig. 13. Software de NIMA para modelo EGM96.

### 5.3. Sistemas de altitudes.

Intuitivamente parece fácil calcular la altitud de un punto cualquiera de la superficie terrestre. Bastaría partir del mareógrafo más cercano e ir determinando por cualquier método las diferencias de altitud entre puntos. Sin embargo, un análisis más profundo del problema nos hace llegar a la conclusión que el problema no es tan sencillo.

En principio, el nivel medio de los mares queda más o menos bien determinado por la existencia en zonas concretas y adecuadas de mareógrafos, que registran a lo largo de un período histórico este nivel, y a los que volveremos con más detalle más adelante. Sin embargo, esta superficie, el geoide, presenta problemas al tratar de extenderla matemáticamente por debajo de los continentes, pues el potencial exterior de las masas verifica la ecuación de Laplace:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

mientras que en el interior de las masas se verifica la ecuación de Poisson:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi G\rho$$

donde para calcular la superficie  $U = \text{cte.}$ , es necesario integrar  $4\pi G\rho$ , siendo  $\rho$  la densidad, con el inconveniente de que no conocemos su distribución en todos los puntos.

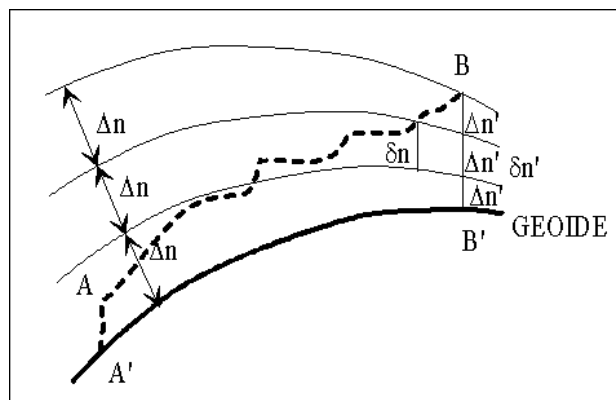
En la nivelación geométrica, como el nivel se equilibra con su eje óptico tangente a la superficie equipotencial que pasa por el centro del nivel, si hiciéramos una nivelación entre dos puntos situados en una misma superficie equipotencial, obtendríamos una diferencia de altitud nula, y esto es evidentemente falso desde el punto de vista geométrico, debido a que las líneas de fuerza del campo tienen una cierta curvatura. Como las superficies equipotenciales son perpendiculares a ellas, estas no son paralelas, y por tanto, sus puntos no equidistan de la superficie original, también equipotencial.

Por ello podemos tener dos conceptos para medir la altitud:

- Distancia a una superficie de referencia (altitud geométrica).
- Dos puntos están a la misma altura si se encuentran sobre la misma superficie equipotencial (altitud dinámica).

Cuando estacionamos un nivel y hacemos lecturas a dos miras dispuestas verticalmente, estamos midiendo diferencias de cotas geométricas.

Suponemos dos puntos alejados A y B de la superficie terrestre. Haciendo la nivelación cerrada veremos que la suma de todas las diferencias de altitudes medidas no será 0, aún salvando los errores inherentes a toda medida. Esto es debido a que matemáticamente la integral de diferencia de altitudes a lo largo de un circuito cerrado no es cero:



**Fig. 14. Superficies equipotenciales**

$$\oint \delta n \neq 0$$

Esto es debido a que el incremento de nivelación  $\delta n$  es distinto al incremento  $\delta n'$ , debido a la falta de paralelismo de las superficies de nivel.

Puesto que el campo gravitatorio terrestre es conservativo, la diferencia de potencial no depende del camino. La diferencia de potencial entre los puntos A y B es:

$$-\delta W = g \delta n = g' \delta n'$$

siendo  $g$  la gravedad en la estación y  $g'$  la gravedad sobre la línea de la plomada en B.

$$\delta n' = \frac{g}{g'} \delta n \Rightarrow \delta n' \neq \delta n$$

Esto indica que las alturas medidas por un camino y otro son distintas, la diferencia de altitudes medida depende del camino recorrido. Por todo ello, en trabajos geodésicos, donde las distancias son largas y las líneas equipotenciales convergen (no son paralelas), no tiene sentido hablar de altitudes geométricas si no añadimos el componente físico de la gravedad.

### 5.3.1. Cota Geopotencial.

Considerando un punto O sobre el geode (a nivel del mar) y un punto A, conectado a O mediante una línea de nivelación, se define la cota geopotencial como la diferencia de potencial entre los dos puntos:

$$C = W_0 - W_A = \int_0^A g \cdot \delta n$$

La cota geopotencial definida pues de esta forma, es independiente del camino recorrido. Es la misma para todos los puntos de una superficie de nivel, puede considerarse como una medida natural de altitud, aunque no tenga dimensiones de longitud. Se mide en unidades geopotenciales (u.g.p.): 1 u.g.p. = 1 Kgal m = 1000 g m = 1 gal Km.

A partir de la definición del número geopotencial se pueden definir algunos tipos de alturas, que algunos autores llaman alturas geopotenciales. La definición de estas alturas será la relación o cociente entre el incremento del potencial y un determinado valor de la gravedad.

$$H_i = \frac{C_i}{g_i}$$

Según los potenciales elegidos y el valor de  $g$  las alturas más usuales son: alturas aproximadas, alturas ortométricas y alturas dinámicas.

### 5.3.2. El potencial normal.

Para poder determinar algunas alturas se ha de definir previamente lo que es el potencial normal. El potencial gravitatorio terrestre es:

$$W = G \int_V \frac{\rho dv}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

El conocimiento riguroso del potencial implica conocer en cada punto de la tierra el valor de su densidad. Ante esta dificultad interesa a veces descomponer el valor del potencial en dos términos: uno de fácil cálculo ( $U$ ) que se acerque lo más posible al valor del potencial real, y el otro la diferencia ( $T$ ). Así,  $W = U + T$ , siendo  $U$  el llamado potencial normal y  $T$  el potencial perturbador o potencial anómalo.

Para la determinación de  $U$  se eligen diversos modelos de Tierra, de forma que su potencial normal  $U$  en cada punto sea muy similar al verdadero  $W$ . Se adopta por ello como modelo de Tierra un elipsoide de revolución con una masa igual a la masa real de la Tierra y con una velocidad de rotación  $\omega$  igual a la terrestre.

El teorema de Stokes hace posible el cálculo del potencial normal, sin ninguna ambigüedad, al conocerse la superficie de nivel exterior y la masa.

Como consecuencia de la definición del potencial normal surge la gravedad normal como  $\gamma = \text{grad } U$ . Para tener una idea del orden de las aproximaciones, en general la relación  $T/W$  es del orden de  $10^{-5}$ .

### 5.3.3. Altitudes dinámicas.

La altitud dinámica de un punto introduce un factor de escala en el concepto de cota geopotencial y hace que el resultado venga expresado en metros. La altitud dinámica de un punto es:

$$H^{din} = \frac{C}{\gamma_0}$$

Sería el resultado de dividir  $C$  por una constante, gravedad normal a una latitud estándar ( $45^\circ$ ), convirtiendo así la cota geopotencial en una longitud. Se usa para la determinación de  $\gamma_0$  la fórmula de 1967:

$$\gamma_{1967} = 978.0318(1 + 0.0053024 \sin^2 \phi - 0.0000059 \sin^2 2\phi)$$

lo que para una  $\phi = 45^\circ$  da un valor de 0,98061898.

#### 5.3.4. Altitudes ortométricas.

Si designamos por  $P_0$  la intersección del geoide con la línea de la plomada que pasa por el punto  $P$  y  $H$  la altitud ortométrica, esto es, la longitud del segmento de línea a lo largo de la línea de la plomada entre  $P_0$  y  $P$ , podemos efectuar la siguiente integración a lo largo de la línea de la plomada, puesto que el resultado es independiente de la trayectoria:

$$C = \int_0^H g \cdot dH$$

multiplicando y dividiendo por  $H$  obtenemos:

$$C = H \cdot \frac{1}{H} \cdot \int_0^H g \cdot dH$$

de modo que  $C = \bar{g} \cdot H$ , donde:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \cdot \int_0^H g \cdot dH$$

es el valor medio de la gravedad sobre la línea de la plomada entre el geoide, (punto  $P_0$ ), y el terreno, (punto  $P$ ), que también puede escribirse como:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \cdot \int_0^H g(z) dz$$

Para convertir por tanto los resultados de nivelación en altitudes ortométricas, necesitamos conocer la gravedad dentro de la Tierra. Esta debe calcularse con los únicos valores que realmente conocemos, que son los valores de la gravedad en la superficie, y se hace reduciendo los valores medidos de la gravedad por el método de Poincaré-Prey.



Observando la figura, Q es el punto en que se ha de calcular  $g'$ , tal que  $g'=g_0$ . Sea P el correspondiente punto de la superficie de modo que P y Q están situados sobre la misma línea de la plomada. La gravedad en P, se supone medida. Para calcular  $g_0$  se usaría la fórmula:

$$g_Q = g_p - \int_p^Q \frac{\partial g}{\partial h} dH$$

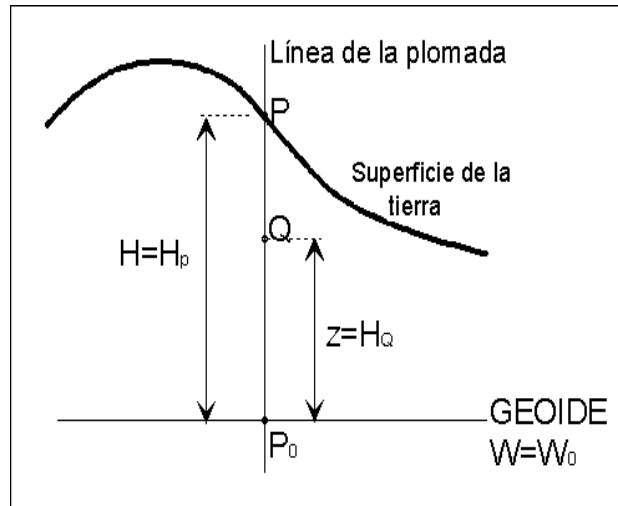


Fig. 15. Altitudes ortométricas

suponiendo que el gradiente real de la gravedad  $\delta g/\delta h$  dentro de la Tierra fuese conocido. Este puede obtenerse por la fórmula de Bruns:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2$$

si se conoce la curvatura media J de las superficies geopotenciales y la densidad entre P y Q.

La reducción de Prey supone que las curvaturas medias de las superficies geopotenciales J coincide con la curvatura media de las superficies equipotenciales del campo de gravedad normal  $J_0$ . Por ello:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma J_0 - 2\omega^2$$

Entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G\rho$$

Numéricamente, despreciando la variación de  $\partial \gamma / \partial h$  con la latitud, y tomando  $\rho = 2,67 \text{ gr/cm}^3$  para la densidad y  $G=66,7 \times 10^{-9}$  unidades c.g.s, resulta:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -0,3086 + 0,2238 = -0,0848 \text{ gal / km,}$$

llegando a la expresión final de la reducción de Poincaré-Prey como:

$$g_0 = g_p + 0.0848 (H_p - H_0)$$

expresando  $g$  en gals y  $H$  en kilómetros.

Esta fórmula no tiene rigor absoluto, en tanto en cuanto estamos igualando  $gJ = \gamma J_0$ , sin embargo se usa en la práctica casi siempre, ya que el conocimiento de la curvatura media real  $J$  de las superficies geopotenciales es bastante imperfecto.

Con estos condicionantes, ya se puede sustituir en la fórmula de la altitud ortométrica el término de la gravedad media a lo largo de la línea de la plomada:

$$\bar{g}(z) = g + 0.0848 \cdot (H - z)$$

donde  $g$  es la gravedad medida en el punto  $P$  del terreno, de tal forma que ahora puede integrarse directamente, resultando:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H [g + 0.0848 (H - z)] dz = g + \frac{1}{H} \cdot 0.0848 \left[ H_z - \frac{z^2}{2} \right]_0^H$$

$$\bar{g} = g + 0.0424 \cdot H \quad (g \text{ en gals, } H \text{ en Km})$$

Con esta aproximación obtenemos las llamadas altitudes ortométricas Helmert:

$$H = \frac{g}{g + 0.0424H} \Rightarrow 0.0424H^2 + gH - C = 0$$

Esta aproximación sustituye el terreno por una lámina Bouguer infinita de densidad constante y altura  $H$ , siendo suficiente la precisión para redes altimétricas de pequeña magnitud y zonas no demasiado montañosas.

### 5.3.5. Altitudes normales.

Este tipo de altitudes fueron introducidas por Molodensky, de tal forma que la superficie del geoide se sustituye por otra superficie (quasi-geoide). Supone que el campo de gravedad de la Tierra es normal, es decir,  $W=U$ ,  $g=\gamma$ ,  $T=0$ . Bajo esta hipótesis se sustituye en la fórmula de altitud ortométrica la gravedad por la gravedad normal del elipsoide  $\gamma$  y las altitudes pasan a ser normales  $H^*$ :

$$C = W_0 - W = \int_0^H \gamma \cdot dH^* \Rightarrow H^* = \int_0^C \frac{dC}{\gamma} \Rightarrow H^* = \frac{C}{\gamma}$$

Para calcular  $\bar{\gamma}$  existen fórmulas desarrolladas, llegando a la expresión de  $H^*$  en función de  $C$  y los parámetros del elipsoide y la latitud:

$$H^* = \frac{C}{\gamma} \left[ 1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) \frac{C}{a\gamma} + \left( \frac{C}{a\gamma} \right)^2 \right]$$

donde  $m = \omega^2 a / \gamma_{\text{ecuador}}$  (Teorema de Clairaut) y  $\gamma$  es la gravedad normal del elipsoide para la latitud  $\phi$ .

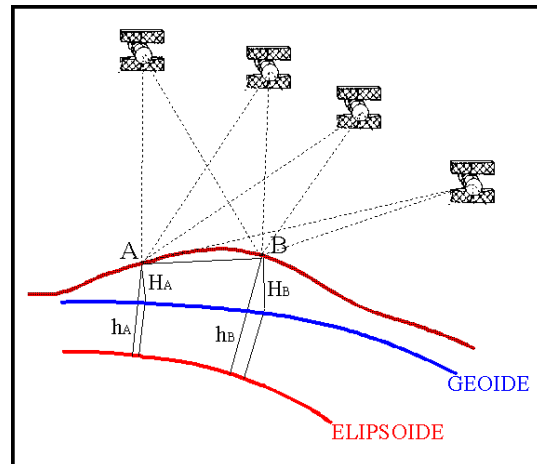
### 5.3.6. Altitudes elipsoidales.

En el caso del GPS, las altitudes se refieren siempre al elipsoide de referencia, GRS80 (WGS84). Este tipo de altitudes se denominan elipsoidales, ya que están medidas desde el punto de la superficie terrestre al elipsoide, medidas sobre la normal al elipsoide que pasa por el punto.

Es evidente que no tienen un significado geométrico ni mucho menos físico, tal como los sistemas anteriores. Es necesario un perfecto conocimiento del geode para relacionar ambos tipos de altitudes, ya que:

$$h = H - N$$

conocida relación en GPS, siendo  $h$  la altitud elipsoidal,  $H$  la ortométrica y  $N$  la ondulación del geode en el punto. Por ello se hace imprescindible el conocimiento de algún modelo de geode de suficiente precisión en la nivelación con GPS.



**Fig. 16. Altitud elipsoidal.**

Por aspectos de desconocimiento de valores absolutos del geode, lo normal es utilizar la relación anterior en la práctica en modo diferencial  $\Delta h = \Delta H + \Delta N$ .

Hemos definido el geode como la **superficie equipotencial que más se aproxima al nivel medio del mar**. Esta definición tan sólo tiene un significado físico (nunca geométrico en el sentido estricto) y por tanto el geode no es en realidad el nivel medio del mar. Sin embargo, en el sentido práctico geodésico, hemos de admitirlo como tal haciendo válidas las definiciones clásicas.

Al hacer una transformación del sistema GPS a un sistema geodésico local o nacional, hemos de tener en cuenta este aspecto, ya que una transformación global clásica tridimensional puede introducir unos errores considerables cuando trabajamos a distancias grandes. La superficie del geoide queda enmascarada y desconocida muchas veces en una transformación tridimensional, de tal forma que si se conoce el geoide con suficiente precisión, es recomendable establecer una transformación 2D para planimetría y una 1D introduciendo la ondulación del geoide en altimetría. Estos aspectos serán detallados más adelante.

Aunque vamos adentrándonos poco a poco en los aspectos que nos interesan del GPS en esta introducción, vamos a ver los métodos que tendríamos de dar altitudes con GPS. Atendiendo exclusivamente a la posibilidad o no de tener un modelo de geoide y sin tener en cuenta nº de receptores, extensión y geometría de la zona, etc:

-1. Se dispone de carta del geoide local con la precisión necesaria.

Nivelación GPS:

$$H_1 - H_2 = h_2 - h_1 - N_2 + N_1 \text{ ----> } \Delta H = \Delta h + \Delta N$$

- Precisión requerida de al menos de 1 ppm en N, no fácilmente alcanzable en muchas áreas.
- Permite eliminar errores en h (obs. simultánea, troposfera....)

- 2. Se dispone de puntos con H conocida en el entorno de trabajo.

Utilizándolos como puntos de control, dotándolos de altitud elipsoidal con GPS y realizando interpolación, se obtendrían perfiles del geoide en la zona.

Se obtienen excelentes resultados en trabajos de ámbito local y si el número de puntos de control es reducido, en zonas donde sepamos que la topografía del geoide no es muy movida (se puede comprobar y detectar anomalías con modelo geopotencial previo).

3. Se dispone de un modelo de geopotencial.

- Normalmente suelen ser globales y no dan la precisión necesaria, aunque sí un conocimiento aproximado de N en términos absolutos.

$$N(\varphi, \lambda) = N_0 + \xi(\varphi, \lambda, r) + \frac{\Delta g_B(\varphi, \lambda)}{\gamma} H(\varphi, \lambda)$$

- Generalmente suelen ser de orden y grado 360. Para mayor precisión se necesitaría mayor grado, orden 10000.

Estos modelos, aunque nominalmente suelen estar en precisiones de  $\pm 1$  m, es evidente que por su carácter global (mallas 15'x15') no pueden recoger anomalías locales y suelen dar perfiles planos del geoide.

Sin embargo, pueden ser útiles para un posicionamiento global absoluto del trabajo.

- 4. Se dispone de un levantamiento gravimétrico.

Se está trabajando actualmente mucho en esta técnica para obtener deformaciones locales de un geoide ya conocido con menor precisión. Para ello se combinan observaciones GPS con las anomalías gravimétricas para obtener deformaciones locales más detalladas.

5. No se dispone de nada de lo anterior: Transformación tridimensional (7 parámetros, Bursa-Wolf, Badekas-Molodenski...).

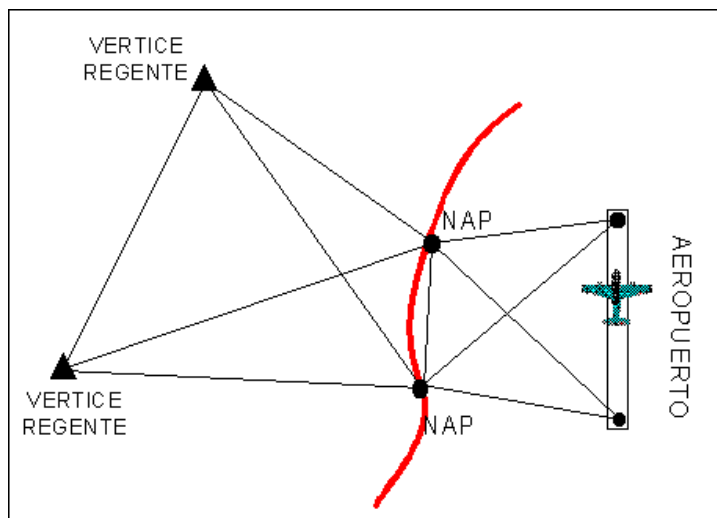
Esta clasificación siempre va a depender de la amplitud del área en que estemos trabajando y de la densidad de puntos de control que tengamos. En un área pequeña (topografía), normalmente se hace esto último (transformación 3D) con buenos resultados, siempre que tengamos un número suficiente de puntos con doble juego de coordenadas.

Conclusión: la transformación WGS84-Sistema Local (en distancias  $>$  (depende)), debe ser una Transformación 2D + 1D, y no 3-D. El conocimiento del geoide "vuelve" a ser cuestión fundamental de la Geodesia.

Ejemplo: Dotación de altitud ortométrica a los aeropuertos de España.

En 1999 AENA-Eurocontrol solicitó al IGN la determinación de altitudes ortométricas a puntos situados en cabecera y pie de pista de 40 aeropuertos de toda España.

Mediante la utilización de perfiles del geoide IBERGEO95 desde dos clavos NAP (red de nivelación de alta precisión) situados a distancias de hasta 25 Km, a sendos puntos del aeropuerto, se tenía una doble comprobación de la altitud ortométrica de cada punto.



*Fig. 17. Esquema de trabajo.*

Esquema de trabajo:

6 receptores, 2 vértices REGENTE (red geodésica GPS), 2 NAP, 2 Señales Aeropuerto.

- Transferencia de  $h$  desde vértices REGENTE a NAP.
- Transferencia de  $h$  desde NAP a Señales Aeropuerto.

*Fig. 15. Esquema de trabajo*

- Obtención de  $N_{obs}$  en NAP.
- Cálculo de  $DN$  entre NAP y Señales Aeropuerto.
- Cálculo de  $H$  Señales Aeropuerto.

$$HAE_1 = HNAP_1 - (hNAP_1 - hAE_1) + (NNAP_1 - NAE_1)$$

$$HAE_1 = HNAP_2 - (hNAP_2 - hAE_1) + (NNAP_2 - NAE_1)$$

-Se obtuvieron así con GPS altitudes ortométricas con precisión centimétrica, precisión que solo se hubiera podido alcanzar con técnicas clásicas de nivelación.

## 6. Sistemas geodésicos modernos: Marcos y Sistemas de Referencia.

### 6.1. Introducción.

Muchos han sido los cambios conceptuales y de metodología en todas las Ciencias en los últimos años debido al gran desarrollo tecnológico surgido. En lo que respecta a las Ciencias de la Tierra, desde que en 1957 comenzara la carrera espacial con el lanzamiento del Sputnik-1, los científicos dedicados tanto a la Geodesia como a la Geofísica empezaron a intuir las posibles aplicaciones y aprovechamientos de tales artilugios. Tanto en el estudio de la forma y dimensiones de la Tierra (*Geodesia*), como en el estudio de los fenómenos físicos que afectan y condicionan dicha forma y dimensiones (*Geofísica*), los cambios, sobre todo en los últimos quince años, han sido espectaculares debido a las aplicaciones surgidas del aprovechamiento de satélites artificiales.

Dentro de la Geodesia, los métodos de posicionamiento por satélite han cambiado por completo la metodología de esta ciencia. El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) es hoy en día herramienta fundamental para todo tipo de trabajos geodésicos.

La investigación y el tratamiento de estos sistemas de posicionamiento por satélite, ha llevado en la actualidad a que sean utilizados para fines científicos, destacando el estudio de la atmósfera terrestre, de sus capas, fenómenos, y muy especialmente para el estudio de la ionosfera, desconocida en muchos aspectos y con una gran influencia sobre los distintos fenómenos que ocurren en nuestro planeta.

Pero quizá, las aplicaciones en las cuales estos sistemas han calado más hondo son la Geodesia y la Topografía, a partir del descubrimiento de que dichos sistemas de posicionamiento podían aportar las precisiones requeridas para el desarrollo de estas ciencias y su aplicación en el desarrollo de infraestructuras, cartografía, sistemas de información geográfica, estudios de movimientos y deformaciones, etc.

Actualmente se acuña una nueva definición de Geodesia: "Ciencia que determina la forma y dimensiones de la Tierra y sus componentes dinámicas".

A finales de los años 80, la demanda de información geográfica georreferenciada en un sistema geodésico de referencia uniforme creció de forma masiva debido a la disponibilidad y versatilidad del GPS en aplicaciones de topografía, navegación, transporte y logística, entre otras. En esta época, la red europea más uniforme hecha

hasta el momento era el European Datum ED87, calculado por la Comisión RETrig de la IAG (International Association of Geodesy), como resultado de la combinación y el reajuste de las redes nacionales de triangulación. Ni este ni el World Geodetic System 1984 (WGS84), realizado a través de observaciones GPS y con una precisión de unos metros, cumplían las expectativas.

Con los nuevos conceptos de Geodesia, se establece una nueva jerarquía de Redes Geodésicas (Work Group VIII, de CERCO), que según el tipo de observaciones de que se disponga se puede dividir en redes geodésicas de (IAG, 1991):

- Clase A: Conjunto de puntos integrados en un determinado Marco de Referencia con campos de velocidades, con  $\sigma < 1$  cm, independiente de la época de observación, garantizada por las estaciones permanentes GPS.
- Clase B: Redes Continentales Fundamentales sin campos de velocidades,  $\sigma < 1$  cm, pero garantizada solo en una época específica, en sitios donde los campos de velocidades no estén definidos, establecidas generalmente por campañas GPS puntuales desde 1993.
- Clase C: Redes apoyadas en Clase B o densificación de las mismas,  $\sigma = 5$  cm.

De acuerdo con estas nuevas definiciones en las que la componente dinámica debida a los Sistemas de Referencia (que posteriormente veremos) es tenida en cuenta, las redes de clase A quedan definidas únicamente por Estaciones Permanentes GPS con un tiempo de observación y proceso de datos relativamente considerable (2 años).

La definición y densificación de los Marcos y de Referencia actuales en los que se apoyan los Sistemas de Posicionamiento Espacial sólo son posibles a través de las Estaciones Permanentes de técnicas espaciales: GPS, VLBI, DORIS y SLR/LLR, como posteriormente se describirá.

Como ya se ha dicho anteriormente, uno de los aspectos fundamentales de la Geodesia moderna es la definición y el mantenimiento del Marco de Referencia Terrestre. La precisión y la realización del mismo es de fundamental importancia para estudiar las propiedades de la Tierra local y globalmente, incluidos el rebote post-glacial, cambios del nivel medio del mar, placas tectónicas, subsidencias regionales, deformaciones en límites de placas, etc.

Los problemas que se abordan en cuanto a las deformaciones terrestres (Geodinámica) tienen que ligarse a un sistema global y de ahí la importancia de un marco de referencia perfectamente determinado.



Un sistema de referencia queda definido por su origen, tres direcciones fijas en el espacio y el sistema de medida. Para relacionar los sistemas de referencia terrestres o no inerciales con los espaciales o inerciales, ambos deben estar perfectamente relacionados geoméricamente y en el tiempo, lo que constituye una de las razones fundamentales para explicar la necesidad, en primer lugar, de mantener una base precisa de tiempos. Ello es debido a que en el Universo no hay un marco de referencia que permanezca fijo, en el transcurso del tiempo, por lo que las direcciones que se eligen como sistema de referencia, se refieren a un instante determinado en el tiempo.

**La consecuencia importante de todo ello es que WGS84 no sirve para trabajos geodésicos de precisión: indefinición centro masas de la Tierra y atmósfera, movimiento del polo, movimiento de placas tectónicas... y es necesario definir los Sistemas y Marcos de Referencia.**

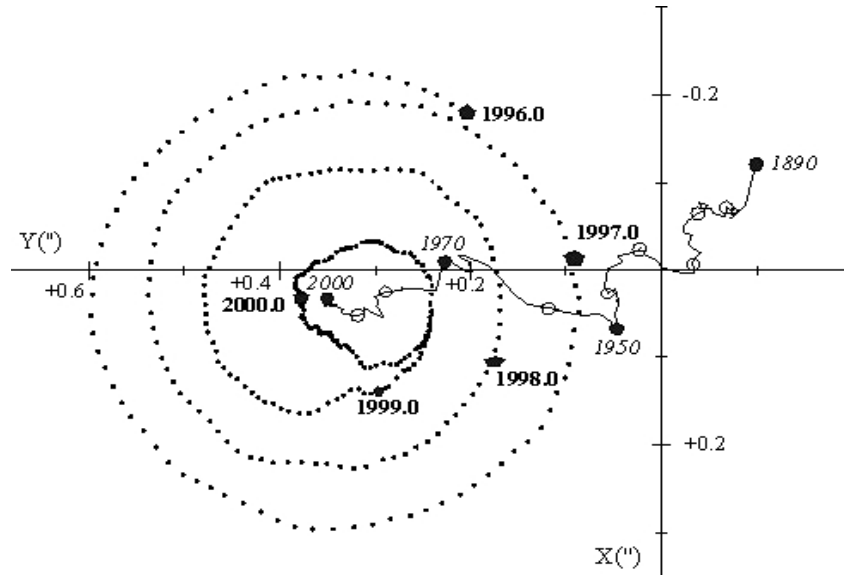
Los efectos temporales más importantes a tener en cuenta en la definición de un Sistema Convencional de Referencia Terrestre serían cuatro:

- movimiento del Polo.
- movimiento de placas tectónicas.
- mareas de la Tierra sólida.
- carga oceánica.

Estos cuatro efectos son casi perfectamente modelados en la definición de los parámetros que intervienen en un CTRS (y por supuesto, en las observaciones GPS derivadas), pero en observaciones GPS de gran precisión con líneas base muy grandes, el software científico de cálculo introduce las oportunas correcciones.

#### **6.1.1. Movimiento del Polo.**

La intersección del eje instantáneo de rotación de la Tierra se mueve con el tiempo en lo que se denomina movimiento del Polo (polar motion).



**Figura 18. Movimiento del polo 1996 - 2000.5.**

El movimiento es prácticamente periódico, con un movimiento principal de unos 434 días (periodo de Chandler) y cuya amplitud no excede de unos 10 metros. A partir de un modelo geofísico se puede prever perfectamente el movimiento, aunque, lógicamente, no de una manera completa.

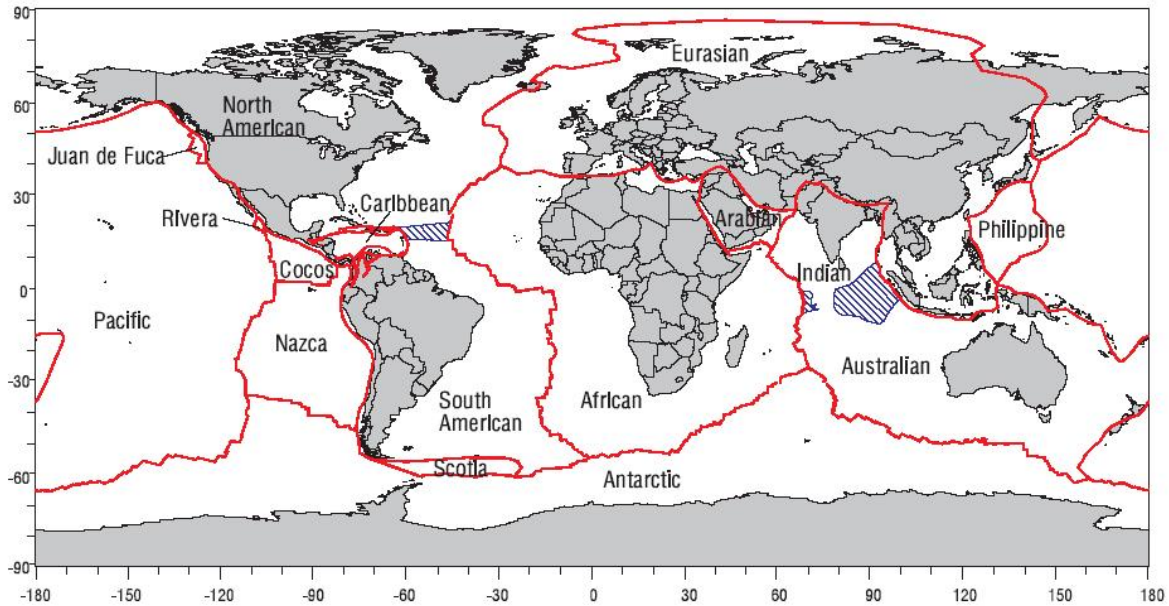
Para evitar variaciones en longitud y latitud provenientes del movimiento del Polo, se define el Conventional Terrestrial Pole (CTP), fijado a la corteza de la Tierra y originalmente definido como el Polo medio entre los años 1900 y 1906. El eje de rotación instantáneo se refiere al CTP mediante las coordenadas del Polo ( $x_p$ ,  $y_p$ ), concepto que veremos posteriormente con más detalle.

### **6.1.2. Movimiento de placas tectónicas.**

Para mantener una estabilidad a nivel centimétrico en un CTRS (Sistema Convencional de Referencia Terrestre), las coordenadas de un conjunto de estaciones deben establecerse para una determinada época y actualizarlas de movimiento de placas tectónicas.

El movimiento observado ha sido como máximo de 7 cm/año (DoD) en las estaciones GPS. Una forma de controlar los movimientos horizontales es estimar parámetros de velocidad en las estaciones.

El modelo de movimiento de placas recomendado es conocido como NNR-NUVEL1A, en el que se establecen 16 placas tectónicas principales, como se muestra en la figura (IERS Conventions, 1996).



**Fig. 19. Principales placas tectónicas del modelo NNR-NUVEL1A.**

El modelo es una mejora de la versión original NUVEL-1 y consiste en una lista de componentes de velocidad angular cartesiana para cada una de las 13 placas principales, de tal forma que la matriz de rotación  $R$  es:

$$R(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

y la transformación entre dos épocas se define mediante (McCarthy, 1996):

$$x(t) = \left[ I + 4.84813681 \cdot 10^{-9} \cdot R(\Omega) \cdot (t - t_0) \right] \cdot x(t_0)$$

La definición de los ITRF se hace entonces con campos de velocidades en las estaciones de seguimiento y para el resto, puede aplicarse el modelo.

$$x_{t,ITRFyy} = x_{t_0,ITRFyy} + (t - t_0)v_{t_0,ITRFyy}$$

### 6.1.3. Efectos de marea.

Los fenómenos de marea son otra fuente de desplazamiento permanente de las estaciones y son modelados según se indican en las convenciones IERS. Es evidente

que la mayoría de programas comerciales no tienen en cuenta estos efectos, que son anulados en líneas base relativamente cortas en GPS diferencial, cuyos efectos, en valor absoluto, pueden llegar a ser de hasta 42 cm. En aplicaciones rigurosas y en cálculo de redes mundiales, debe ser introducido un modelo de corrección.

Las mareas son causadas por la variación temporal de la atracción gravitacional del Sol y la Luna debido al movimiento orbital. Mientras que las mareas oceánicas son mucho más evidentes en las zonas costeras y sus inmediaciones, las mareas de la Tierra sólida (terrestres) son relativamente fáciles de calcular con modelos simples. Sus periodicidades pueden ser derivadas directamente del movimiento de cuerpos celestes, de forma similar a la nutación.

Las mareas terrestres generan desplazamientos periódicos de las estaciones que dependen de la latitud. La variación puede ser como mucho de unos 30 cm en la componente vertical y 5 cm en la horizontal.

La siguiente expresión proporciona los desplazamientos de mareas terrestres (McCarthy, 1996):

$$\Delta x = \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{GM_E} \frac{\|r_E\|^4}{\|r_j\|} \left[ h_2 e \left( \frac{3}{2} (r_j e)^2 - \frac{1}{2} \right) + 3l_2 (r_j e) \cdot (r_j - (r_j e) \cdot e) \right]$$

donde:

- $GM_E$  es la constante gravitacional geocéntrica de la Tierra.
- $GM_j$  es la constante gravitacional geocéntrica de la Luna (subíndice  $j=2$ ) y el sol (subíndice  $j=3$ ).
- $e$  es el vector unitario de la estación en el sistema de coordenadas geocéntricas ( $x$ ).
- $r$  es el vector unitario del cuerpo celeste.
- $h_2$  y  $l_2$  son los números de grado 2 de Love y Shida que describen las propiedades elásticas de la Tierra.

Esta ecuación proporciona los valores de marea terrestre con una precisión de 5 mm.

#### 6.1.4. Carga oceánica.

Se denomina carga oceánica a la deformación del suelo del mar y de la tierra costera como consecuencia de la redistribución del agua del mar que tiene lugar durante la marea oceánica. La corteza terrestre se deforma ante el peso del agua de marea.

El desplazamiento en un lugar en componente radial ( $\Delta c$ ) en un tiempo  $t$  viene dado por la expresión (McCarthy, 1996):

$$\Delta c = \sum_j f_j A_{c_j} \cos(\omega_j t + \chi_j + u_j - \Phi_{c_j})$$

El sumatorio sobre  $j$  representa once ondas de marea tradicionalmente designadas como semidiurnas  $M_2, S_2, N_2, K_2$ , componentes diurnas  $K_1, O_1, P_1$  y de largo periodo  $M_f, M_m, S_{sa}$ .

$\omega_j$  y  $\chi_j$  las velocidades angulares y los argumentos astronómicos en el tiempo  $t = 0^h$ .  $\chi_j$  representa la posición del Sol y la Luna.

$f_j$  y  $u_j$  dependen de la longitud del nodo de la Luna.

$A_{c_j}$  y  $\Phi_{c_j}$  son las amplitudes y las fases respectivamente de la estación, las cuales pueden ser calculando usando modelos de marea oceánica.

El IERS proporciona estos valores para las estaciones ITRF y también el Astronomical Institute de la Universidad de Berna tiene un servicio automático que proporciona los coeficientes mediante la descarga en su servidor del fichero de coordenadas de las estaciones que queramos.

También en <http://www.oso.chalmers.se/~loading> (Observatorio de Onsala) se pueden obtener los coeficientes a partir de diferentes modelos de carga (el más utilizado es el GOT00.2).

Table 7.1 Sample of ocean loading table file. Each site record shows a header with the site name, the CDP monument number, geographic coordinates and comments. First three rows of numbers designate amplitudes (meter), radial, west, south, followed by three lines with the corresponding phase values (degrees).

---

Columns designate partial tides  $M_2, S_2, N_2, K_2, K_1, O_1, P_1, Q_1, M_f, M_m$ , and  $S_{sa}$ .

\$\$

ONSALA60 7213

\$\$

\$\$ Computed by H.G. Scherneck, Uppsala University, 1989

\$\$ ONSALA 7213 lon/lat: 11.9263 57.3947

.00384	.00091	.00084	.00019	.00224	.00120	.00071	.00003	.00084	.00063	.00057
.00124	.00034	.00031	.00009	.00042	.00041	.00015	.00006	.00018	.00010	.00010
.00058	.00027	.00021	.00008	.00032	.00017	.00009	.00004	.00007	.00001	.00020
-56.0	-46.1	-90.7	-34.4	-44.5	-123.2	-49.6	178.4	14.9	37.3	24.6
75.4	97.6	40.8	94.8	119.0	25.4	98.7	-14.1	-177.0	-126.7	-175.8
84.2	131.3	77.7	103.9	17.2	-55.0	25.2	-165.0	173.3	121.8	91.3

---

Fig. 20. Tabla de coeficientes para carga oceánica en Onsala.

Para más información sobre este y los anteriores efectos de una forma más pormenorizada, consultar "IERS Conventions 2003", International Earth Rotation Service (<http://www.iers.org>).

## 6.2. Sistema Internacional de Referencia Celeste (ICRS).

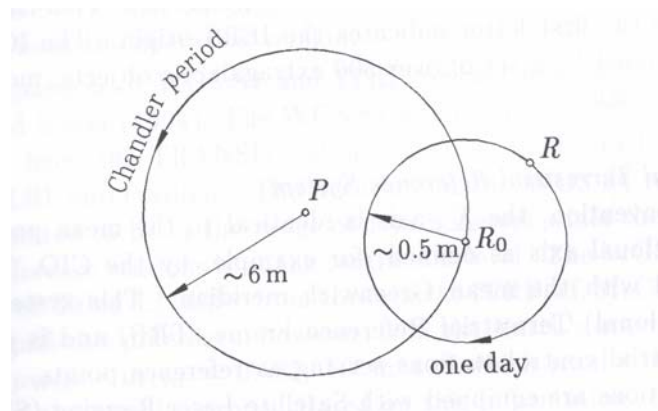
En principio, los sistemas inerciales, es decir, los que no están sometidos a aceleraciones, son los más apropiados para definir la posición de objetos externos a la Tierra, como las estrellas, cuásares o satélites artificiales. Sin embargo, no es posible considerar un sistema totalmente inercial, ya que no se tendrían en cuenta los efectos relativistas, que dependen del campo de la gravedad de la Tierra, estando sometido a aceleraciones por el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol. Este sistema se denomina "cuasi-inercial".

Otro inconveniente es el movimiento del Polo, es decir la variación que se detecta tanto en módulo como en dirección del vector velocidad angular. Este movimiento es la suma de dos componentes:

- ✓ la nutación astronómica con respecto al sistema de coordenadas inercial celeste.
- ✓ movimiento del Polo con respecto al sistema de referencia terrestre.

A su vez, el movimiento del Polo se divide en otros dos:

- ✓ Rotación libre o período de Chandler, con una duración de 430 días y un radio respecto a la posición media del Polo de 6 metros.
- ✓ Movimiento diario de unos 50 cm debido al movimiento forzado por la acción gravitatoria del Sol y la Luna.



**Fig. 21. Movimiento del Polo y período de Chandler.**

El Sistema de Referencia Celeste Internacional (ICRS), tiene como origen el baricentro del sistema solar y es el conjunto de algoritmos y constantes con procedimientos y parámetros aprobados internacionalmente: fórmulas de precesión y nutación, coeficientes de precesión, amplitudes, velocidad de la luz, etc. La dirección del polo es definida por la International Astronomical Union IAU, según la teoría de Precesión (Lieske,1977) y la teoría de nutación (Seidelmann, 1982), para la época J2000.

Asociado a este Sistema existe un Marco Internacional de Referencia Celeste (ICRF), definido por coordenadas ecuatoriales de precisión en el sistema J2000.0, de fuentes extragalácticas determinadas con VLBI. Origen en el baricentro del sistema solar.

### **6.3. Sistema Convencional de Referencia Terrestre (CTRS).**

Los sistemas de referencia terrestres o fijos a la Tierra se utilizan para determinar coordenadas de puntos sobre la superficie terrestre o en sus proximidades, por lo que están afectados por el movimiento de rotación de la tierra, apareciendo la aceleración centrífuga y la de Coriolis, por lo cual se puede decir que son sistemas no inerciales.

Es evidente que el principal problema de estos sistemas es conseguir una dirección del eje Z que sea fija, invariable con el tiempo, y para ello se adoptó por convenio un polo medio.

El polo medio es el definido como el eje medio de rotación correspondiente al centro del movimiento libre del polo entre los años 1900.0 y 1906.0. Este polo se denomina Conventional International Origin CIO o Conventional Terrestrial Pole, CTP.

El sistema de referencia Terrestre convencional CTRS, se define del siguiente modo:

- Origen: Centro de masas terrestre o geocentro.
- Eje Z: coincide con el Polo terrestre Convencional CTP.
- Eje X: Perpendicular al anterior, que pasa por el origen y por el meridiano de Greenwich en la época 1903.0, adoptado como meridiano de referencia.
- Eje Y: Perpendicular a los dos ejes anteriores y contenido en el ecuador medio, formando un sistema de coordenadas trirrectángulo.

La diferencia entre el CTP y el CEP o polo instantáneo se obtiene de la observación directa y el procesamiento de estaciones permanentes multitécnica y es uno de los

productos que proporciona el Servicio Internacional de Rotación de la Tierra (International Earth Rotation Service, IERS), a partir del seguimiento de la variación de coordenadas a lo largo del tiempo. Para el cálculo de esta variación de coordenadas se utilizan diferentes métodos: Very Long Baseline Interferometry (VLBI), Satellite Laser Ranging (SLR), Lunar Laser Ranging (LLR), GPS y DORIS/PRARE.

En definitiva, el ITRS es geocéntrico, en el centro de masas de la Tierra sólida incluyendo océanos y atmósfera. La unidad de longitud es el metro y la precisión de la dirección definida por el IRM (IERS Reference Meridian) es de  $\pm 0.0005''$ . La evolución en el tiempo de esta orientación es calculada usando la condición de "no rotación" en los movimientos tectónicos de toda la tierra.

El CTRS es la conexión práctica entre el ICRS y un sistema terrestre, un sistema de coordenadas ligado firmemente al globo terráqueo. El Sistema Convencional de Referencia Terrestre adoptado para el análisis de conjuntos de datos individuales obtenidos mediante técnicas de observación (VLBI, SLR, LLR, GPS, DORIS, PRARE), como para la combinación de soluciones individuales en un conjunto unificado de datos (coordenadas de estaciones, parámetros de orientación de la Tierra, etc) sigue, de acuerdo con la IAG, los siguientes criterios:

- ✓ CTRS es un sistema local de coordenadas dentro del contexto de la teoría de la relatividad, válido para la Tierra con una precisión relativa de  $10^{-10}$ .
- ✓ CTRS es un sistema cuasi-cartesiano en rotación, definido a partir de un sistema geocéntrico sin rotación.
- ✓ El tiempo coordinado es el Tiempo Geocéntrico Coordinado (TGC).
- ✓ CTRS es geocéntrico, con centro de masas de la Tierra incluyendo la atmósfera.
- ✓ Orientación por el eje Z del "BIH1984.0" dirigido hacia el polo IERS (igual que el CIO) y los ejes X y Z forman el plano del meridiano cero.
- ✓ Su evolución temporal en orientación no generará una rotación global residual con respecto a la corteza terrestre (esto es la condición de NNR, no-net-rotation).

#### **6.4. Parámetros de Orientación de la Tierra.**

Por todo lo dicho anteriormente es fundamental incluir en el Sistema de Referencia Terrestre, en el cual hacemos todas las medidas, el concepto de los Parámetros de Orientación de la Tierra (EOP).



La orientación de la Tierra es definida a partir de un sistema coordenado ligado al geocentro de la Tierra Gxyz (el Sistema Terrestre materializado por las coordenadas observadas de las estaciones) y un sistema coordenado ligado al espacio inercial GXYZ (el Sistema Celeste, materializado por las coordenadas de estrellas, cuásares y objetos del Sistema Solar). La forma de describir la rotación de la Tierra es especificar la matriz de rotación entre esos dos sistemas.

Si la tierra rotase uniformemente alrededor de un eje de rotación fijo (con respecto a la corteza de la Tierra y el Sistema Celeste), los cambios de la rotación podrían ser descritos únicamente con un parámetro: la variación del ángulo de rotación linealmente con el tiempo o bien la escala de tiempo que se deriva de este ángulo de rotación (tiempo universal). En realidad, el eje de rotación no se fija con respecto a la corteza ni al Sistema Celeste. Los cambios en el vector de rotación de la Tierra son causados por efectos gravitacionales causados por la Luna, el Sol y los planetas, desplazamientos de materia en diferentes partes del planeta y otros mecanismos. Las oscilaciones observadas pueden ser interpretadas en términos de elasticidad del manto, irregularidades en la Tierra, propiedades de la frontera núcleo-manto, reología del núcleo, aguas subterráneas, variabilidad oceánica y atmosférica en términos de clima.

En principio, la orientación terrestre podría ser descrita a través de tres ángulos independientes (por ejemplo los ángulos de Euler). Sin embargo, la monitorización continua de la rotación de la Tierra considera por separado el movimiento del eje de rotación en la Tierra y en el espacio. La determinación actual de esto se hace a través de los cinco Parámetros de Orientación de la Tierra (Earth Orientation Parameters, EOP). Los EOP del IERS describen las irregularidades de la rotación de la Tierra. Técnicamente, son los parámetros que dan la rotación del ITRS con respecto al ICRS como una función del tiempo.

Estos parámetros están referidos al Polo Celeste de Efemérides (Celestial Ephemeris Pole, CEP), que está cercano al polo de rotación. Su movimiento en el espacio es la precesión y la nutación. Prácticamente su movimiento es equivalente al del polo geográfico (polo ITRF) para periodos inferiores a dos días. La posición del CEP es perfectamente modelada con una precisión de 0.001".

- **dPsi, dEps-**. El movimiento del polo celeste, descrito por los modelos de precesión y nutación. Las diferencias observadas reflejan la diferencia entre el movimiento del polo celeste real con respecto al predicho por los modelos de

precesión y nutación de la IAU (Unión Astronómica Internacional). La mayoría de estas variaciones son explicadas por errores en unos pocos términos: términos seculares, términos periódicos (principalmente 18.6, 1, 0.5 años y 14 días). Estos términos están incluidos en el modelo de las Convenciones IERS (1996), las cuales están de acuerdo con los modelos en magnitudes por debajo de 0.001". Vienen indicados como (dPsi, dEps) y son observados por estaciones VLBI. En definitiva, **Dpsi y Depsilon** dan los desplazamientos (offsets) en longitud y oblicuidad del polo celeste con respecto a las posiciones definidas por los modelos convencionales de la IAU.

- **UT1**-. El CEP permanece muy cerca del eje de rotación instantáneo (desviación por debajo de 0.02") y por tanto es necesario un recálculo del ángulo de rotación de la Tierra en el espacio. El IERS nos da el ángulo de rotación de la Tierra, pero en forma de escala de tiempo UT1, que es el tiempo requerido para una rotación completa si la Tierra rotase uniformemente (360° en 86164.09891 s). Las tablas nos dan a los usuarios el desplazamiento con respecto a una escala de tiempo uniforme TAI y UTC: UT1-TAI y UT1-UTC. El exceso del periodo de rotación con respecto al periodo medio se denomina exceso de longitud del día (LOD).
- **x<sub>p</sub> , y<sub>p</sub>**-. Después de aplicar la matriz de correcciones de precesión - nutación por los desplazamientos del polo celeste y el ángulo de rotación alrededor del CEP, queda una rotación residual con respecto al International Reference Frame. Está asociado con dos pequeños ángulos que son las coordenadas del polo CEP relativo al eje Gz del Marco Terrestre Internacional de Referencia (International Terrestrial Reference Frame, ITRF), que es el eje de rotación o polo geográfico. Esto se debe mayormente a la redistribución de masas oceánicas y atmosféricas relacionadas con cambios estacionales. Se reflejan en las Coordenadas del polo, x e y del CEP respecto al Polo de Referencia del IERS (IERS Reference Pole, IRP). El CEP difiere del eje de rotación instantáneo en unos términos quasi-diurnos con amplitudes por debajo de 0.01" (Seidelmann, 1982). El eje x está en la dirección del Meridiano de Referencia del IERS (IERS Reference Meridian, IRM); el eje Y está perpendicularmente a este hacia el oeste.

El IERS determina rotaciones diferenciales que son  $x_p$ ,  $y_p$  , y que relacionan las coordenadas del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CEP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & y_p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CTP}$$

**Tabla 3. Formato de los ficheros ERP del IERS.**

```

IERS C04 POLE                                13-JUN-02 21:01
-----
CELESTIAL POLE OFFSET: NO                    SUBDAILY POLE MODEL: RAY
DATE TIME X-POLE Y-POLE UT1-UTC GPS-UTC RMS XP RMS YP RMS DT DE-CPO DP-CPO RMS EP RMS PS
YYYY MM DD HH MM ("") ("") (S) (S) REM ("") ("") (S) ("") ("") ("") ("")
2002 1 1 0 0 -0.17699 0.29400 -0.115826 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00067 -0.05316 0.00000 0.00000
2002 1 2 0 0 -0.17747 0.29761 -0.116703 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00074 -0.05295 0.00000 0.00000
2002 1 3 0 0 -0.17832 0.30085 -0.117711 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00084 -0.05287 0.00000 0.00000
2002 1 4 0 0 -0.17909 0.30370 -0.118895 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00095 -0.05294 0.00000 0.00000
2002 1 5 0 0 -0.17956 0.30649 -0.120257 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00107 -0.05315 0.00000 0.00000
2002 1 6 0 0 -0.17991 0.30956 -0.121650 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00113 -0.05343 0.00000 0.00000
2002 1 7 0 0 -0.18063 0.31273 -0.122914 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00113 -0.05372 0.00000 0.00000
2002 1 8 0 0 -0.18172 0.31556 -0.123968 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00108 -0.05393 0.00000 0.00000
2002 1 9 0 0 -0.18271 0.31828 -0.124808 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00100 -0.05398 0.00000 0.00000
2002 1 10 0 0 -0.18303 0.32118 -0.125421 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00096 -0.05388 0.00000 0.00000
2002 1 11 0 0 -0.18304 0.32423 -0.125791 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00100 -0.05368 0.00000 0.00000
2002 1 12 0 0 -0.18276 0.32740 -0.126048 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00116 -0.05347 0.00000 0.00000
2002 1 13 0 0 -0.18224 0.33044 -0.126131 13. C04 0.00000 0.00000 0.000000 -0.00136 -0.05328 0.00000 0.00000
... ..
    
```

### 6.5. International Terrestrial Reference Frame (ITRF).

Las realizaciones del Sistema Terrestre Internacional de Referencia (International Terrestrial Reference System, ITRS) son producidas por la Sección de Marcos Terrestres del IERS bajo el nombre de Marco Terrestre Internacional de Referencia (International Terrestrial Reference Frame, ITRF), lo cual dicho en palabras muy sencillas consiste en una lista de coordenadas y velocidades para una selección de estaciones IERS (estaciones de registro continuo).

Actualmente, el ITRFyy es publicado periódicamente por el IERS, donde yy especifica el último año cuyos datos se han usado para la formación del marco. Así por ejemplo, ITRF97 designa el marco de coordenadas y velocidades construido en 1997 usando los datos disponibles del IERS durante 1996.

El conjunto de puntos con coordenadas y velocidades son determinados conjuntamente con datos de VLBI, GPS, SLR/LLR y DORIS. Su materialización se especifica en coordenadas cartesianas ecuatoriales y en coordenadas geográficas en el elipsoide GRS80. El Sistema Convencional de Referencia Terrestre se conoce como ITRS (Sistema Internacional de Referencia Terrestre). Cada técnica geodésica espacial

suministra su correspondiente conjunto de datos, cuyo análisis conduce a una versión del ITRS.

La posición de un punto situado sobre la superficie de la Tierra en una época "t" cuyas coordenadas "x(t)" son funciones del tiempo, se expresa como:

$$X(t) = X_0 + \frac{dX_0}{dt}(t - t_0) + \sum_x \Delta X_x(t)$$

donde  $\Delta X_x$  son las correcciones debidas a diversos efectos variables en el tiempo (desplazamientos ocasionados por mareas terrestres, incluidos los efectos permanentes, la carga oceánica, mareas polares, rebote postglacial, carga atmosférica, variaciones del geocentro...),  $X_0$  y  $t_0$  son las coordenadas y el tiempo de la época inicial. Para alcanzar precisión relativa de  $10^{-10}$ , se deben determinar las correcciones con una precisión de 1 mm.

El modelo para calcular posiciones en una época de referencia determinada dentro del mismo ITRF es lineal, en la forma:

$$\bar{X}_R(t) = \bar{X}_0 + \dot{\bar{X}} \cdot (t - t_0)$$

La definición del ITRS cumple las siguientes condiciones:

- Es geocéntrico, el centro de masas se define para la Tierra entera, incluyendo océanos y atmósfera.
- La orientación fue inicialmente dada por el Bureau International de l'Heure (BIH) en la época 1984.0.
- La evolución con el tiempo de la orientación es definida usando la condición NNR (no-net rotation) con respecto a movimientos horizontales tectónicos sobre la Tierra entera.

La Oficina Central del IERS tiene la sede en el Observatorio de París y más concretamente en la Sección del Marco Terrestre, Laboratorio de Investigación en Geodesia (LAREG) del Instituto Geográfico Nacional y se encarga de producir y publicar los sucesivos marcos ITRF.

La estrategia general para el cálculo de ITRF consiste en combinar todas las soluciones posibles ofrecidas por los centros de análisis de redes SLR, VLBI y GPS, quitando los

constreñimientos para luego poner los mínimos constreñimientos y en todo caso, dejar unos vínculos localmente nada más.

Para establecer el Datum de un ITRF determinado se necesitan 4 parámetros:

- **Orientación**, desde el ITRF 88 hasta el ITRF92, la orientación fue definida para que no existiese rotación entre los diferentes marcos de referencia. La orientación del ITRF93 ha sido constreñida para que sea consistente con los parámetros de orientación Terrestre en la época 88.0 definidos por el IERS.
- **Origen**, a partir del ITRS94, el origen se calculó como una media ponderada de soluciones SLR y GPS.
- **Escala**, a partir del ITRF94, la escala se fijó teniendo en cuenta dos aspectos, por un lado una media ponderada de soluciones VLBI, SLR y GPS, y por otra parte que fuese consistente con la definición y realización del ITRS realizada por el IUGG/IAU.
- **Variaciones** con el tiempo de estos parámetros.

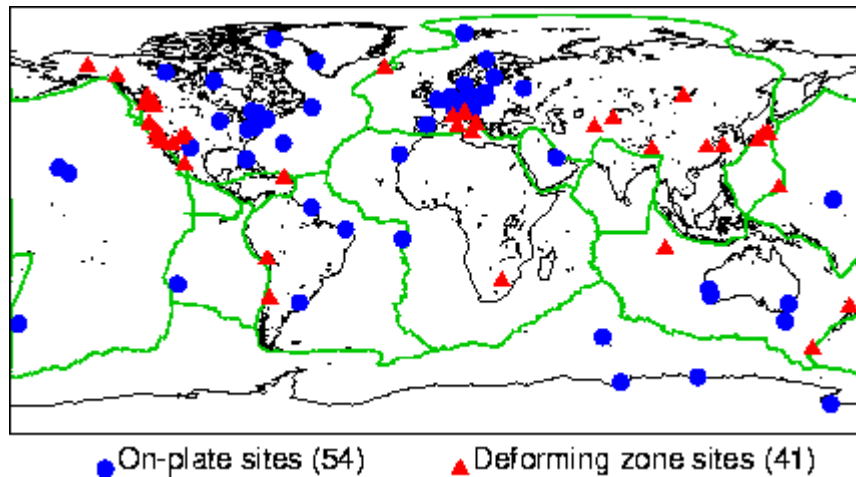
Estos parámetros variarán de unos a otros, dependiendo de la precisión de los datos obtenidos o de las técnicas empleadas para la obtención de los mismos. La transformación de las coordenadas de un ITRF a otro ITRF se efectúan por medio de matrices de transformación.

En particular, para el ITRF 2000, las soluciones que han intervenido en la definición final una vez quitados los constreñimientos han sido: 3 de VLBI, 7 de SLR, 1 de LLR, 6 de soluciones globales de GPS, 2 de DORIS y 1 de una combinación multi-técnica. En suma a estas, 6 soluciones GPS para densificaciones regionales que se añadirán posteriormente al ITRF (SIRGAS, EUREF...).

- La escala del sistema se ha determinado a partir de las observaciones de VLBI y SLR
- El origen únicamente a partir de las soluciones ponderadas de SLR, ya que se supone la variación es lineal.
- La orientación ha sido calculada a partir de estaciones IERS (todas las técnicas) con una calidad garantizada en base a:
  - Observación continua al menos durante 3 años

- Estaciones situadas lejos de zona de contacto de placas o zonas de deformación.
- Precisión final de velocidad mejor que 3 mm/ año.
- Residuos en las velocidades inferiores a 3 mm/año en al menos tres soluciones diferentes.

En el siguiente gráfico se observan las 54 estaciones que cumplen todos los criterios (azul), y en rojo, 41 estaciones que no cumplen el tercero.

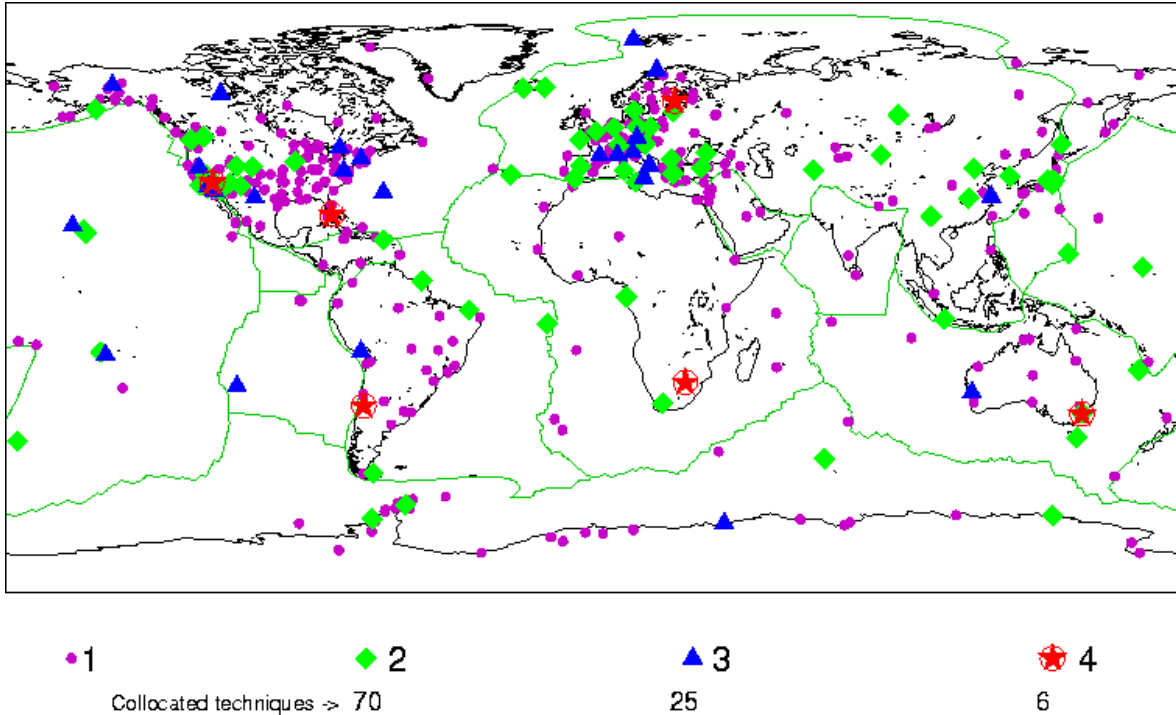


**Fig. 22. Estaciones ITRF que cumplen todos los criterios.**

Anteriormente, los valores de orientación se sacaban minimizando las diferencias observadas con respecto al modelo NNR-NUVEL1A, pero en esta versión esto se ha desechado, puesto que se han encontrado inconsistencias fuertes con este modelo.

El resultado final es un fichero de las estaciones IERS con sus coordenadas y velocidades, las cuales han de ser tenidas en cuenta en el cómputo de cualquier red geodésica con precisiones suficientemente adecuadas para la Geodinámica. Cualquier medida geodésica de precisión ligada a un Sistema de Referencia Terrestre tendrá que estar referido al ITRF temporal y posteriormente al Sistema correspondiente (ITRS).

En el siguiente gráfico se ven todas las estaciones mundiales en sus diferentes técnicas de observación para la definición del marco global y la partición de las diferentes placas tectónicas:



**Fig. 23. Estaciones ITRF y número de para su determinación.**

Las estaciones que tienen un error medio cuadrático (RMS) de los desplazamientos mayor que 5 cm / año o si la magnitud del vector es mayor de 10 cm / año, son eliminadas del análisis.

## 6.6. El International Terrestrial Reference Frame 2000.

El ITRF2000 está dividido en dos partes:

1. Combinación principal de todas las soluciones conteniendo posiciones y velocidades para todas las estaciones, dividido en las diferentes técnicas usadas:

- VLBI: ITRF2000\_VLBI.SSC
- SLR: ITRF2000\_SLR.SSC
- GPS: ITRF2000\_GPS.SSC
- DORIS: ITRF2000\_DORIS.SSC

2. Otras soluciones de densificaciones que serán añadidas en un segundo paso (densificaciones regionales):

- Estaciones EUREF GPS: ITRF2000\_EUR\_GPS\_PERM.SSC (red europea)

- Puntos EUREF (GPS y otros en Europa): ITRF2000 EUROPE.SSC (red europea secundaria).
- CORS Network: ITRF2000 CORS.SSC (EEUU)
- ALASKA Network: ITRF2000 ALASKA.SSC (Alaska).
- South America Network: ITRF2000 SIRGAS.SSC (Sudamérica)
- SCAR Network: ITRF2000\_SCAR.SSC (Antártida)
- REGAL Network: ITRF2000\_REGAL.SSC (Alpes)
- RGP Network: ITRF2000\_RGP.SSC (Francia)

([lareg.ensg.ign.fr](http://lareg.ensg.ign.fr) en directorio pub/itrf/itrf2000):

La estrategia de análisis seguida para la generación de las soluciones ITRF se siguen a partir de los siguientes pasos:

1. Eliminación de constreñimientos a las distintas soluciones aportadas.
2. Aplicación de mínimos constreñimientos globales.
3. Propagación para cada solución de las posiciones de la EMPV (Épocas de Mínima Varianza en la Posición).
4. Combinación de todas las soluciones juntas.

En el caso del GPS, los Centros de Análisis que han aportado las soluciones finales al ITRF2000 han sido:

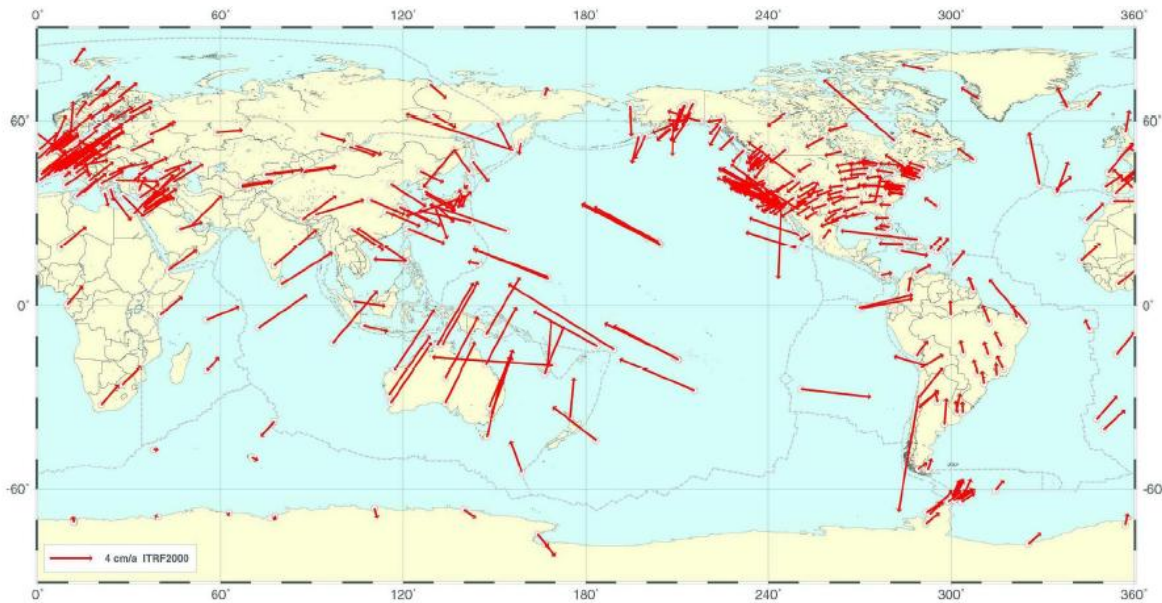
**Tabla 4. Centros de Análisis del IGS para el ITRF2000.**

CENTRO	ACRÓNIMO	TIEMPO	Nº ESTACIONES
Center for Orbit Determination in Europe	(CODE)	93-00	160
GeoForschungsZentrum Potsdam	(GFZ)	93-00	98
International GPS Service	(IGS)	96 -00	179
Jet Propulsion Laboratory	(JPL)	91-99	112
University of Newcastle upon Tyne	(NCL)	95-99	90
NOAA, National Geodetic Survey	(NOAA)	94-00	165



**Tabla 5. Fragmento del ITRF2000 para SIRGAS.**

DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmas	SOLN
			-----m/m/y-----				
30602M001	ASCENSION	GPS ASC1	6118526.077	-1572344.698	-876451.166	.004	.002 .001
30602M001				-.0025	-.0048	.0102	.0015 .0007 .0004
41602M001	FORTALEZA	GPS FORT	4985386.627	-3954998.587	-428426.482	.002	.002 .001
41602M001				-.0013	-.0044	.0121	.0004 .0004 .0003
41901M001	BOGOTA	GPS BOGT	1744399.096	-6116037.813	512731.625	.003	.005 .001
41901M001				-.0057	.0277	.0112	.0015 .0027 .0006
42005M001	SANTA CRUZ	GPS GALA	-33796.116	-6377522.655	-82120.899	.002	.006 .001
42005M001				.0516	-.0011	.0123	.0009 .0022 .0005
42402M001	MARACAIBO	GPS MARA	1976117.057	-5948895.194	1173592.127	.029	.073 .019
42402M001				.0141	.0023	.0080	.0102 .0255 .0065



**Fig. 24. Velocidades ITRF2000.**

**6.7. Transformaciones entre Marcos de Referencia.**

La relación entre el Marco Internacional de Referencia Celeste (ICRF) y el Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF) se describe mediante la fórmula:

$$X_{ICRF} = P \cdot N \cdot T \cdot X \cdot Y \cdot X_{ITRF}$$

donde P es la matriz de precesión, N la de nutación, T es la matriz que expresa la rotación para un tiempo sidéreo S y XY son las matrices de transformación desde el

marco terrestre al marco conectado con el polo instantáneo de efemérides.  $X_{ICRF}$  es el vector relacionado con el ICRF y  $X_{ITRF}$  es el vector relacionado con los ejes ITRF.

Lo que más nos interesa es la transformación entre dos marcos de referencia terrestres. Bajo la hipótesis de un Sistema de Referencia Terrestre ideal definido como un triedro cercano a la Tierra y rotando con ella, la transformación general de coordenadas para cualquier punto de la Tierra desde TRS1 a TRS2 viene dada por una similitud en tres dimensiones en la forma (Boucher, 1986):

$$\bar{X}_2 = \bar{T}_{1,2} + \lambda_{1,2} \cdot R_{1,2} \cdot \bar{X}_1$$

donde T es un vector de translación,  $\lambda$  un factor de escala y R una matriz de rotación.

Como consecuencia de la aplicación conceptual anterior, el International Earth Rotation Service (IERS) usa las fórmulas linealizadas. La transformación estándar entre dos sistemas de referencia es una similitud euclidiana de siete parámetros: tres traslaciones, un factor de escala y tres rotaciones, pero también sus derivadas con el tiempo ( $\dot{T}, \dot{D}, \dot{R}$ ) en un sentido estricto.

Utilizando la forma lineal:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & -R3 & R2 \\ R3 & D & -R1 \\ -R2 & R1 & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

donde T son las traslaciones, R las rotaciones y D el factor de escala.

Si se consideran las derivadas con el tiempo de los parámetros anteriores y derivamos la ecuación anterior en la forma:

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \bar{T} + D \cdot \bar{X}_1 + R \cdot \bar{X}_1 \quad \text{con } \lambda = 1 + D \text{ y } R = (1 + R)$$

queda:

$$\dot{\bar{X}}_2 = \dot{\bar{X}}_1 + \dot{\bar{T}} + \dot{D} \cdot \bar{X}_1 + D \cdot \dot{\bar{X}}_1 + R \cdot \dot{\bar{X}}_1 + \dot{R} \cdot \bar{X}_1$$

D y R son del orden de  $10^{-5}$  y  $\dot{X}$  unos 10 cm por año, los términos  $D \cdot \dot{\bar{X}}_1$  y  $R \cdot \dot{\bar{X}}_1$  representan 0.1 mm en 100 años, luego se pueden despreciar, con lo que la ecuación rigurosa anterior para la transformación de 14 parámetros queda:

$$\dot{\bar{X}}_2 = \dot{\bar{X}}_1 + \dot{\bar{T}} + \dot{D} \cdot \bar{X}_1 + \dot{R} \cdot \bar{X}_1$$

**Tabla 6. Parámetros de transformación entre diferentes realizaciones del ITRF.**

ITRF Solution	$T1$ (cm)	$T2$ (cm)	$T3$ (cm)	$D$ (ppb)	$R1$ (mas)	$R2$ (mas)	$R3$ (mas)	Epoch
ITRF97	0.67	0.61	-1.85	1.55	0.00	0.00	0.00	1997.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF96	0.67	0.61	-1.85	1.55	0.00	0.00	0.00	1997.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF94	0.67	0.61	-1.85	1.55	0.00	0.00	0.00	1997.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF93	1.27	0.65	-2.09	1.95	-0.39	0.80	-1.14	1988.0
rates	-0.29	-0.02	-0.06	0.01	-0.11	-0.19	0.07	
ITRF92	1.47	1.35	-1.39	0.75	0.0	0.0	-0.18	1988.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF91	2.67	2.75	-1.99	2.15	0.0	0.0	-0.18	1988.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF90	2.47	2.35	-3.59	2.45	0.0	0.0	-0.18	1988.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF89	2.97	4.75	-7.39	5.85	0.0	0.0	-0.18	1988.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF88	2.47	1.15	-9.79	8.95	0.1	0.0	-0.18	1988.0
rates	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	

## 6.8. Organismos Internacionales.

### 6.8.1. International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS).

El International Earth Rotation Service fue creado en 1987 por el IAG con el objetivo principal de servir a la comunidad astronómica, geodésica y geofísica:

- El International Celestial Reference System (ICRS) y su realización, el International Celestial Reference Frame (ICRF).
- El International Terrestrial Reference System (ITRS) y su realización, el International Terrestrial Reference Frame (ITRF).
- Los Earth orientation parameters (EOP) requeridos para el estudio de la variación rotacional terrestre y la transformación entre el ICRF y el ITRF. (Coordenadas del polo.



- Datos geofísicos para interpretar las variaciones temporal – espaciales en el ICRF, ITRF o parámetros de orientación de la tierra, así como modelar sus variaciones.
- Estándares, constantes y modelos que sean adoptados internacionalmente.

<http://www.iers.org>

### **6.8.2. International GPS Service (IGS).**

El IGS colecta, archiva y distribuye las observaciones GPS de la suficiente precisión para satisfacer los objetivos de un amplio rango de aplicaciones y experimentos. Estos datos en bruto de GPS son usados por el IGS para generar :

- Efemérides de satélites GPS.
- Parámetros de rotación de la Tierra (EOP).
- Coordenadas y velocidades de las estaciones IGS.
- Información del estado de reloj de los satélites GPS y de las estaciones IGS.

En particular las precisiones de los productos del IGS son suficientes y de hecho aprovechados para la mejora y extensión del International Terrestrial Reference Frame (ITRF), la monitorización de las deformaciones de la Tierra sólida, la monitorización y las variaciones de la Tierra líquida, determinación de órbitas de satélites no GPS, monitorización de la ionosfera y la recolección de datos informativos de la troposfera.

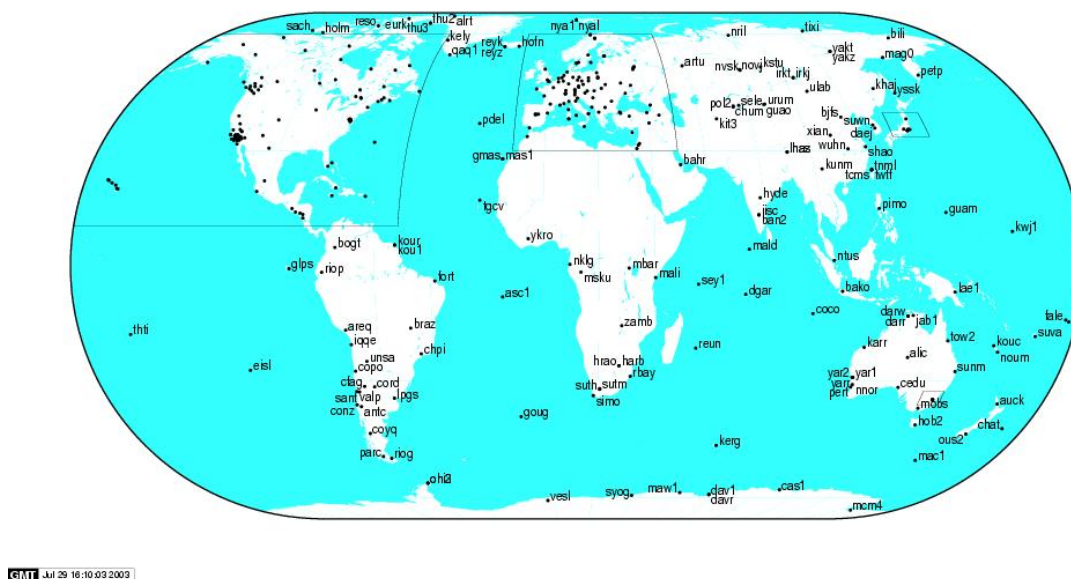
Operacionalmente el IGS se divide fundamentalmente en:

- Red de Estaciones Permanentes - Centros Operacionales
- Centros de Datos
- Centro Coordinador de Centros Análisis
- Coordinador de ITRF
- Grupos de Trabajo y de Proyectos Especiales
- Bureau Central
- Dirección y Coordinación General
- Centros de Análisis
  - Centros de Análisis Diarios
  - Centros Asociados productores de coordenadas, velocidades, información troposférica, ionosférica, combina soluciones globales...

A día de hoy el la red GPS del IGS consta de un total de 273 estaciones repartidas por todo el globo.

La densificación del IGS para Europa desde el punto de vista del GPS y el Marco de Referencia es EUREF (EUropean REference Frame), con unos objetivos análogos a los del IGS, estructura y funcionamiento completamente comunes.

<http://igs.cb.jpl.nasa.gov>



*Fig. 25. Estaciones Permanentes GPS del IGS.*

### 6.8.3. Sistema de Referencia Geocéntrico para América (SIRGAS).

El proyecto SIRGAS fue establecido durante la Conferencia Internacional de la Definición de un Datum Geocéntrico para Sudamérica, en octubre de 1993 en Asunción, Paraguay, por invitación de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG), el Instituto Panamericano de Geografía e Historia (PAIGH) y la National Imagery and Mapping Agency (NIMA), en aquel entonces, United States Defense Mapping Agency (DMA). Representantes de cada entidad y la mayoría de países de Sudamérica participaron y crearon el Comité SIRGAS y el Consejo Científico.

SIRGAS es, por tanto, la densificación del ITRF en América, conformado actualmente por una red de más de 180 estaciones (aunque sólo algunas como estaciones permanentes), cuya distribución es regularmente homogénea sobre el continente.

Los objetivos que se establecieron para el proyecto fueron:

- ✓ Definir un Sistema de Referencia para Sudamérica.
- ✓ Establecer y mantener una red de referencia para establecer y definir un datum geocéntrico.

Estos objetivos del sistema de referencia para el continente fueron asumidos en la Conferencia de Asunción con los condicionantes:

- ✓ Sistema de Referencia SIRGAS: International Terrestrial Reference Frame (ITRF).
- ✓ Datum geocéntrico: ejes de coordenadas dados por el Sistema de Referencia SIRGAS y parámetros del elipsoide GRS80, orientado según los ejes coordenados equivalente al ITRF (SIRGAS 1997).

Se establecieron tres grupos de trabajo con vistas a cumplir los objetivos:

- Grupo I: Sistemas de Referencia
- Grupo II: Datum Geocéntrico
- Grupo III: Datum Vertical

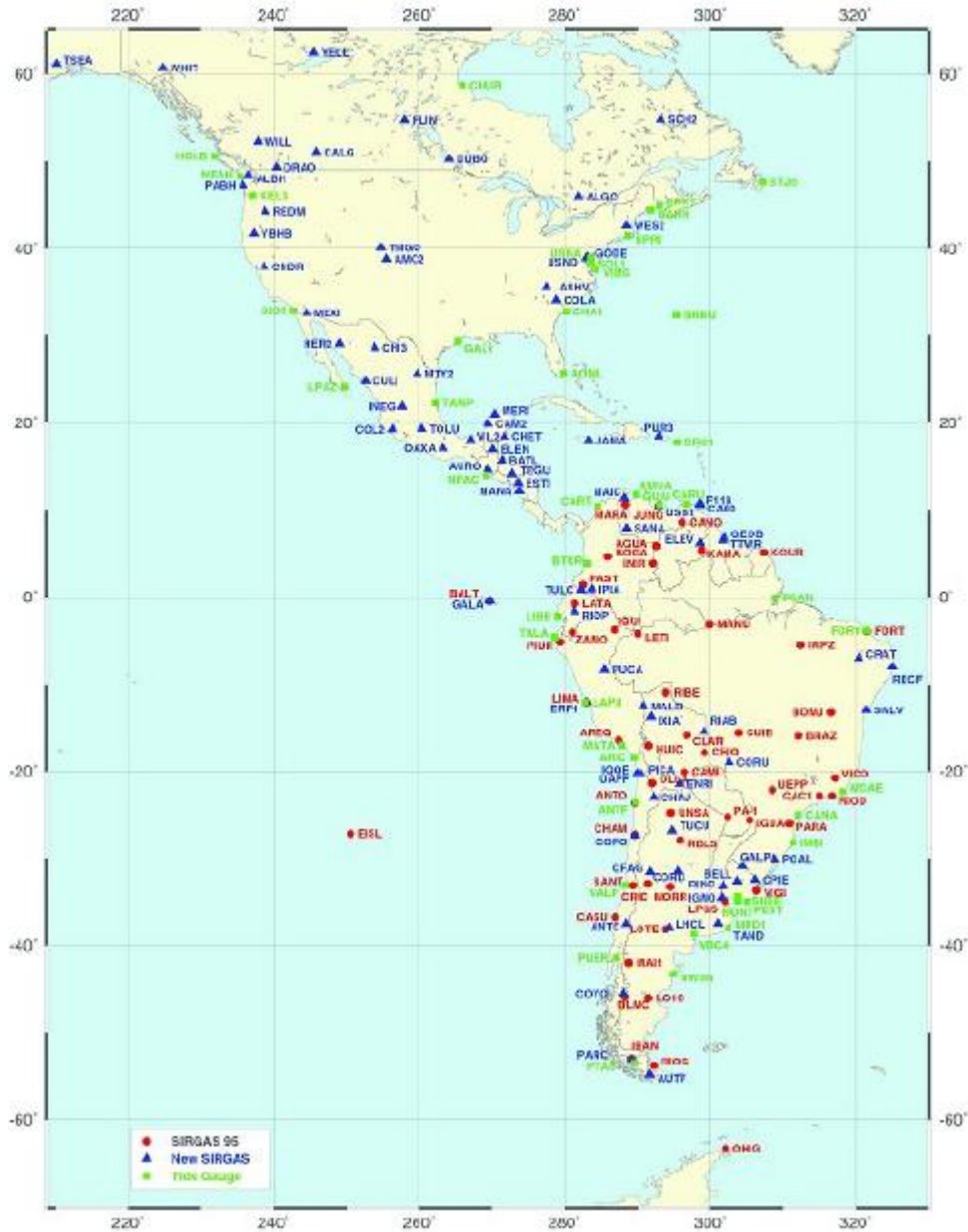
Al principio SIRGAS fue restringido a América del Sur y el Sistema de Referencia fue realizado con 58 estaciones observadas por una campaña de GPS en 1995. Las coordenadas finales estaban en ITRF94 (época 1995.4) y los ajustes fueron realizados por el Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI) y el NIMA, siendo aprobados y presentados en la Asamblea del IAG en Rio de Janeiro, 1997.

El datum geocéntrico está realizado sobre las redes observadas con GPS por los diferentes países y conectados con las redes de triangulación existentes, densificaciones de SIRGAS.

El datum vertical está definido por estaciones mareógraficas (para cada país) y observadas con GPS junto con otras señales con nivelación. Para este propósito se llevó a cabo una campaña en mayo de 2000 para observar todos los mareógrafos y algunas estaciones que conforman el marco de referencia vertical. Esta campaña también fue la repetición de las mediciones hechas sobre el Marco de Referencia

Geocéntrico SIRGAS e incluyó el resto de América, desde los países de América del Sur y nuevos puntos de América Central, Estados Unidos y Canadá (SIRGAS 2002). El resultado fue una red conformada por 184 estaciones con coordenadas calculadas en el ITRF2000, época 2000.4.

Una red de estaciones permanentes GPS proporciona también datos al IGS y son procesadas semanalmente por el RNAAC-SIRGAS, que es una densificación regional de la red global IGS. Incluye preferentemente estaciones de observación continua, pero también incluye la ocupación periódica de las estaciones pasivas de SIRGAS, proporcionando campos de velocidades de las estaciones.

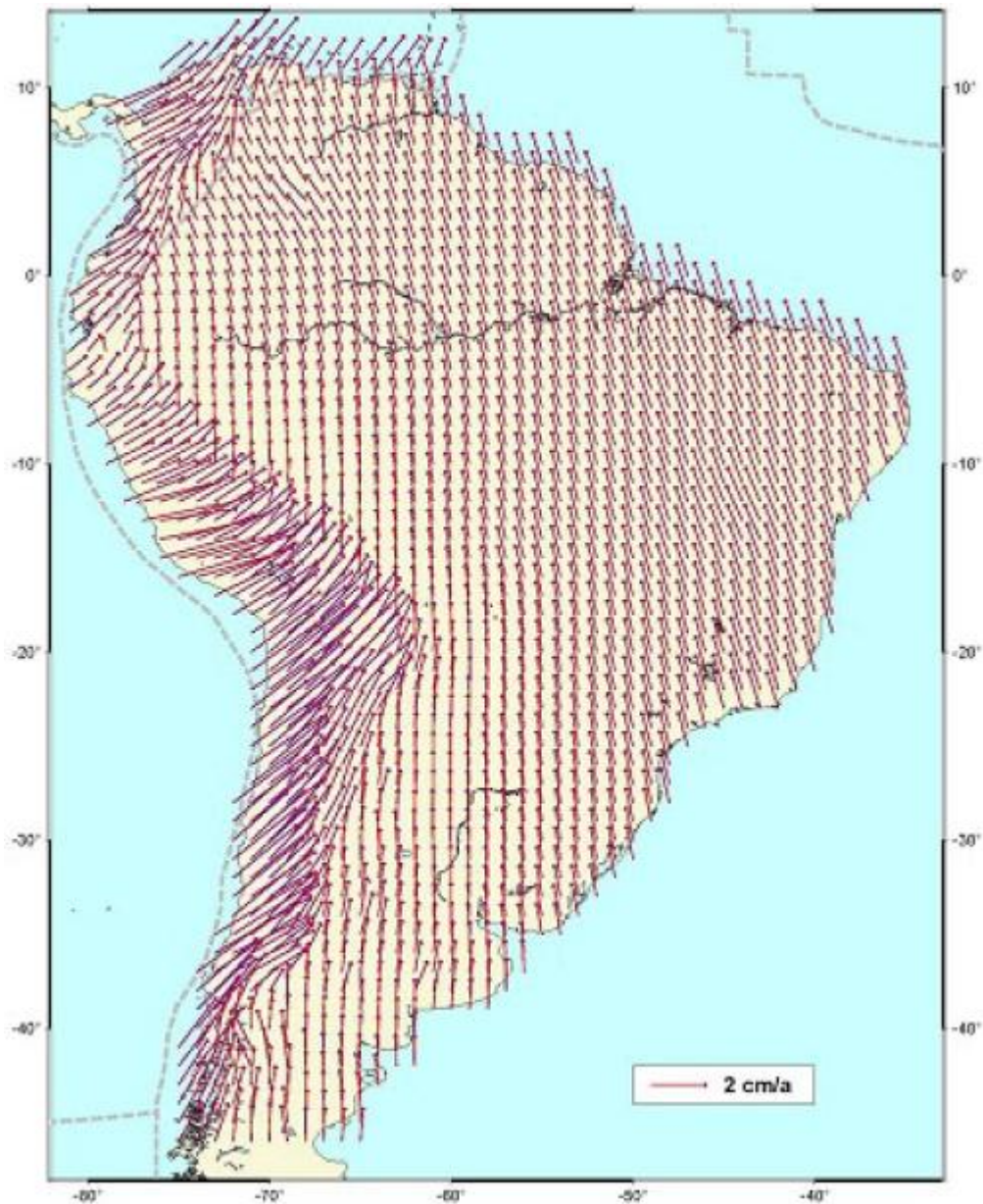


**Fig. 26. Estaciones GPS SIRGAS.**

La red GPS permanente está compuesta por más de 40 puntos en Sudamérica y los datos son procesados por el Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI) como Centro de Procesamiento Regional o RNAAC (Regional Network Associate Analysis Center) del IGS. Se calculan velocidades a partir de las estaciones permanentes, las campañas anteriormente citadas de 1995 y 2000 y los proyectos geodinámicos de reobservación, como por ejemplo CAP (Central Andes GPS Project), SAGA (South America Geodynamics Activity), SNAPP (South America – Nazca Plate Motion Project) y CASA (Central And South America GPS Geodynamics Project). El último campo de



velocidades para el continente sudamericano se muestra en la siguiente figura (Drewes & Heidbach, 2003).



**Fig. 27. Campo de velocidades SIRGAS.**

La ONU, en su Séptima Conferencia Cartográfica para las Américas (Nueva York, 2001) recomendó la adopción de SIRGAS como sistema de referencia oficial para todos los países de América (ver <http://www.ibge.gov.br/home/geografia/geodesico/sirgas/principal.html>).

## **7. Direcciones de interés.**

Antes de continuar el curso conviene citar unas referencias básicas en la web acerca de los temas explicados y otras utilidades relacionadas.

- International GPS Service: <http://igscb.jpl.nasa.gov>
- UNAVCO: <http://www.unavco.org>
- International Earth Rotation Service: <http://www.iers.org>
- National Geodetic Survey (EEUU): <http://www.ngs.noaa.gov>
- ITRF web site: <http://itrf.ensg.ign.fr>
- International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG): <http://www.iugg.org>
- Scripps Orbit and Permanent Array Center (SOPAC): <http://sopac.ucsd.edu>
- European Reference Frame (EUREF): <http://www.epncb.oma.be>
- BKG Data Center: <http://igs.ifag.de>